

線圈上磁場強度的計算方法

本文中一共使用三種方法計算線圈內磁場的強度，第一種方法最簡單，是一種純理論式，但只能計算線圈中心軸上任意點的磁場。這種計算方法沒有顧慮到線圈厚度對磁場的影響，因此只適用在非常薄的線圈。第二種方法使用半理論半經驗式，它已考慮到線圈厚度對磁場的影響，但此計算方法也只能計算線圈中心軸上任意點的磁場。第三種方法適用性較廣，可以求得線圈上任意點的磁場，但計算過程非常複雜，必須使用電腦才能達成。第三種方法的計算過程是假設每一圈線圈所產生的磁場彼此獨立無關，首先計算單一圈的線圈在任意點的磁場，然後把每一圈所產生的磁場相加。磁場的計算把理論上的橢圓積分法改成數學多項式，然後以電腦計算，首先計算徑向及軸向磁場，再由徑向及軸向磁場求得絕對磁場值及方向。計算結果顯示線圈的內側壁的磁場最大，以纏繞八層共 1600 圈的超導線圈通以 400 A 的電流而言，中心磁場高達 0.9 T，靠近線圈外側壁中心附近的磁場最小，只有 0.25 T。

林正雄

一、引言

人類對磁場的利用無所不在，小至變壓器的電壓轉換、馬達因磁力相斥而旋轉，大至磁振造影掃描儀 (MRI) 皆倚賴磁場而變成可能。磁場不像電流，電流必須靠導體導引，磁束可以在空間上任意擴散到非常遠的地方。磁場的存在將影響其他電子零組件的功能，對附近的儀器、機器及飛航安全造成干擾，強大的磁場甚至可能影響人體的健康。為利用磁場及防止磁場洩漏，線圈內磁場的強度必須準確的予以計算。

磁場的產生方法有二種，一種是由永久磁鐵產生，另一種是由電磁方法產生。由永久磁鐵產生的林正雄先生為美國紐約州立大學博士，現任國立清華大學材料科學與工程學系教授。

點是不需要消耗電能，但只能產生大約 0.1 T 以下的低強度磁場。較大的磁場必須由電磁方法產生，由銅線繞成線圈，通以電流產生磁場。磁場的大小正比於電流的大小，也正比於線圈的圈數。

線圈產生磁場的同時，由於磁束的互相排斥，如果所通的電流相當大，而和線圈本身的電流產生巨大的電磁作用力，這作用力可能會摧毀線圈。為避免線圈所產生的磁場破壞線圈的超導性，或使線圈扭曲變形，此現象尤以超導線圈最明顯，故超導線圈在建造時必須詳細計算線圈所占之體積內部每一點的磁場。在本文中將介紹三種線圈磁場強度的計算方法。第一種方法不考慮線圈厚度，第二種方法考慮線圈的厚度所造成的影響。此二種只能計算線圈中心軸任意點的磁場強度，第三種方法可以計算線圈內外任意點的磁場強度。

二、線圈上磁場強度的計算

本文以超導線圈為例，假設超導線的線徑為 0.001 m，繞在直徑為 0.2 m、長度為 0.2 m 的不鏽鋼圓筒上，每層纏繞 200 圈，纏繞 8 層，共 1600 圈。

1. 不考慮線圈厚度對磁場所造成的影響時

一條導線通上直流電後，在導線週圍所產生的磁場強度如 (1) 式所示：

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}, \quad r \geq R \quad (1)$$

其中

- r ：和導線中心的距離，單位為 meter (m)；
- R ：導線的半徑，單位為 m；
- B ：和導線的距離為點的磁場強度，單位為 tesla (T)；
- I ：電流，單位為 amp (A)；
- μ ：導磁率，其單位為 N/A^2 ，或是 weber/(A.m)，真空中的導磁率稱為 μ_0 ，其值為 $4\pi \times 10^{-7}$ ，空氣的導磁率為 $1.00000037 \mu_0$ 。

(1) 式用於 $r \geq R$ 的場合，如果 $r \leq R$ ，導線內的電流所產生的磁場強度必須用下列方程式⁽¹⁾ 計算：

$$B = \frac{\mu r I}{2\pi R^2} \quad (2)$$

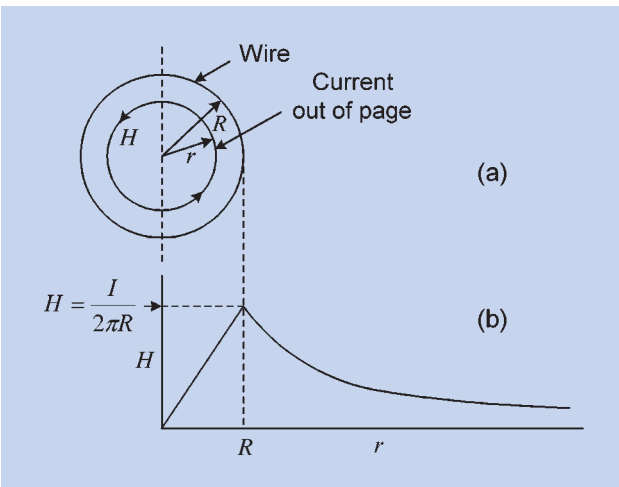


圖 1. 無限長直線導體內外的磁場分佈。

從 (1) 及 (2) 式可以看出導線表面的磁場最大，導線中心的磁場為零。導線內外，磁場強度如圖 1 所示。

導線圍繞成圓圈時，離線圈高度為 z (圖 2) 的磁場強度如下式 (1) 所示：

$$B = \frac{\mu I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3)$$

其中

R ：導線所圍成圓圈的半徑，單位為 m；

z ：導線中心軸上的高度，單位為 m。

當 $z = 0$ 時，(3) 式變成

$$B = \frac{\mu I}{2R} \quad (4)$$

由 (4) 式所求得的磁場是圓圈中心點的磁場。

眾多圓圈併在一起變成螺管線圈 (solenoid)。螺管線圈中心軸上任一點 x (圖 3) 的磁場強度⁽²⁾ 是

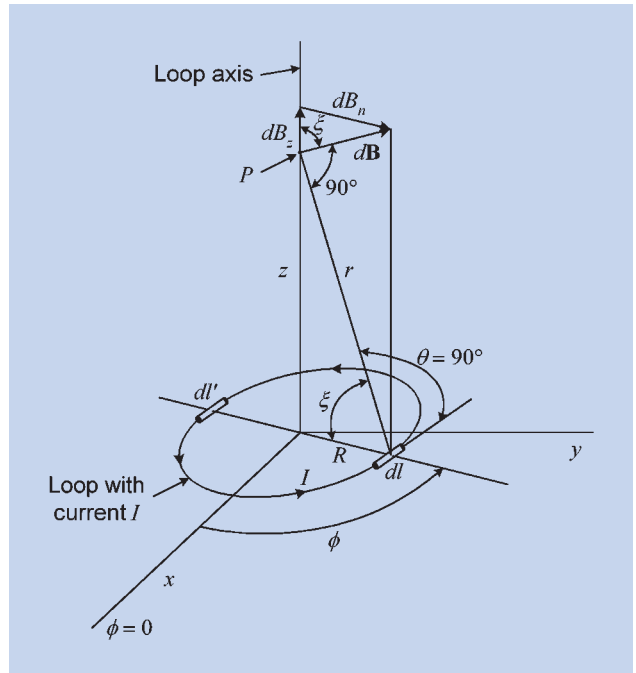


圖 2. 導線圍成圓圈之後的座標關係。

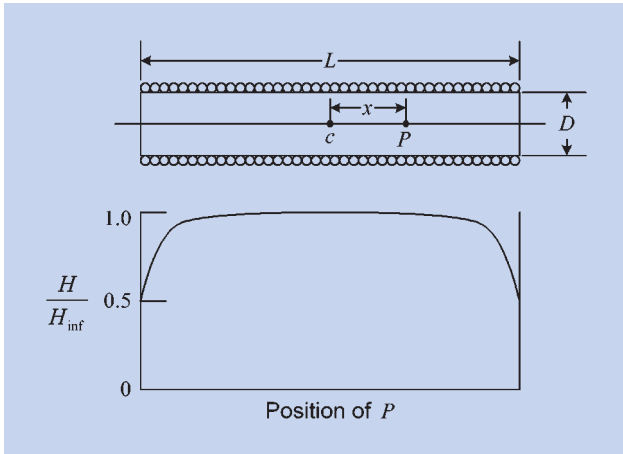


圖 3. 螺管線圈。\$H_{inf}\$ 代表螺管線圈 \$L/D\$ 為無限大時的磁場。

$$B = \frac{\mu n I}{L} \left\{ \frac{L+2x}{2[D^2+(L+2x)^2]^{1/2}} + \frac{L-2x}{2[D^2+(L-2x)^2]^{1/2}} \right\} \quad (5)$$

其中

\$D\$: 螺管的直徑，單位為 m ；

\$L\$: 螺管的長度，單位為 m ；

\$x\$: 螺管中心軸上離中心點的距離，單位為 m。

當 \$x=0\$ 時，(5) 式變成

$$B = \frac{\mu n I}{L} \left[\frac{L}{(D^2+L^2)^{1/2}} \right] \quad (6)$$

由 (6) 式所求得的是螺管中心軸上中心點的磁場。

當 (6) 式中 \$L\$ 遠大於 \$D\$ 時，亦即 \$L/D\$ 接近無限大時，(6) 式變成

$$B = \frac{\mu n I}{L} \quad (7)$$

由 (7) 式所求得的是非常長的螺管中心軸上中心點的磁場。

假設線圈的直徑為 0.2 m，長度也是 0.2 m，上面用直徑為 1 mm 的導線纏繞八層，總共 1600 圈。假設線圈的電流為 400 A，以最簡單的 (7) 式計算，忽視此線圈的長度直徑比只有 1，而把這一

線圈的長度當做無限長，則其結果如下：

$$B = \frac{\mu n I}{L} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1600 \times 400}{0.2} = 4.019 \text{ T}$$

如果考慮線圈的長度直徑比只有 1 而使用 (6) 式計算，則其結果如下：

$$B = \frac{\mu n I}{2^{1/2} L} = 2.843 \text{ T}$$

從上述的計算中可以看出線圈的長度內徑比為 1 時，使用 (7) 式比用 (6) 式所算出的中心軸上中心點的磁場大 41%。因此在低線圈長度直徑比時，必須使用 (6) 式計算磁場。

欲求在線圈中心軸上兩個端點上，亦即在圖 4 上的 \$x=0.5L\$ 位置的磁場時，須以 (5) 式計算，結果如下：

當 \$L\$ 遠大於 \$D\$ 時，(5) 式中的第二項為零，(5) 式變成

$$B = \frac{\mu n I}{2L} = 2.009 \text{ T}$$

線圈中心軸上兩端的磁場剛好是其中心點磁場的 50%。

當 \$L=D\$ 時，(5) 式變成

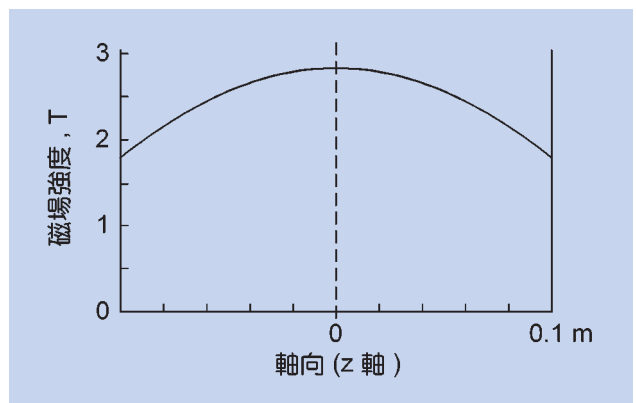


圖 4. 直徑及長度都是 0.2 m 的線圈上繞八層線圈，每層 200 圈，通電 400 A 時線圈中心軸上各點的磁場。

$$B = \frac{\mu n I}{5^{1/2} L} = 1.797 T$$

故當 $L = D$ 時，線圈兩端的磁場只有中心磁場 (2.843 T) 的 63.2%，此值和 L 遠大於 D 時有很大的不同。當 $L = D$ 時，利用 (5) 式所計算的線圈中心軸上各點的磁場如圖 4 所示，離開線圈的中心點，磁場即開始逐漸下降，最後下降至線圈兩端時只剩下中心點的 63.2%。

2. 考慮線圈厚度對磁場造成影響時

(6) 式中沒有考慮線圈的厚度，假設導線纏繞非常多層，變成一個非常厚的線圈，則線圈的厚度對磁場所造成的影響不能忽視。此時線圈上的導線密密麻麻的繞在一起，為方便起見，螺管線圈上的電流可以用電流密度 J 表示。螺管線圈 (圖 5) 中心軸上中心點的磁場強度可依下列的公式 (3) 計算：

$$B = \mu J a_1 \beta \ln \left[\frac{\alpha + (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}}{1 + (1 + \beta^2)^{1/2}} \right] \quad (8)$$

其中

- J ：電流密度，其定義為 $J = NI/[2b(a_2 - a_1)]$ ，單位為 A/m^2 ；
- a_1 ：線圈的內半徑，其單位為 m ；
- a_2 ：線圈的外半徑，其單位為 m ；
- $2b$ ：線圈的長度，其單位為 m ；
- α ：線圈內外半徑之比， $\alpha = a_2/a_1$ ，無單位；
- β ：線圈長度之半和內半徑之比， $\beta = b/a_1$ ，無單位。

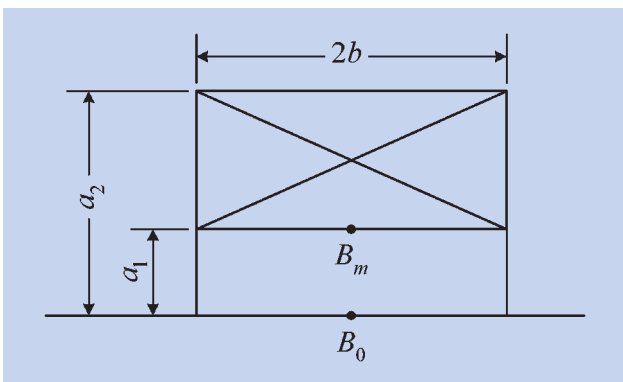


圖 5. 多層螺管線圈， $\alpha = a_2/a_1$ ， $\beta = b/a_1$ 。

線圈以直徑為 1 mm 的導線繞八層時，由於第二層超導線是繞在第一層二條超導線之間隙上 (圖 6)，因此層和層之間的距離不是 1 mm，而是 0.866 mm。假設線圈 (圖 3) 的內徑及長度都是 20 cm，則

$$b = 0.1 \text{ m}$$

$$a_1 = 0.1 \text{ m}$$

$$a_2 = 0.1 + 0.000866 \times 7 + 0.001 = 0.10706 \text{ m}$$

$$\alpha = a_2/a_1 = 1.0706$$

$$\beta = b/a_1 = 1$$

從 (8) 式內電流密度的定義，

$$J = \frac{NI}{2b(a_2 - a_1)} = \frac{1600 \times 400}{2 \times 0.1 \times (0.10706 - 0.1)} = 4.5325 \times 10^8 \text{ A/m}^2$$

此值代進 (8) 式

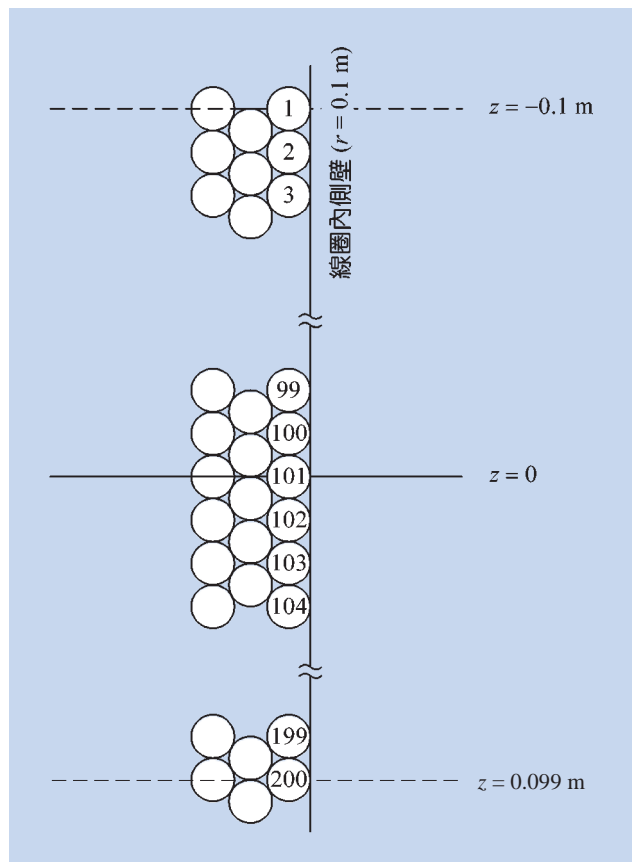


圖 6. 線圈上每圈導線的相對位置。

$$\begin{aligned}
 B &= \mu J a_1 \beta \ln \left[\frac{\alpha + (a^2 + \beta^2)^{1/2}}{1 + (1 + \beta^2)^{1/2}} \right] \\
 &= 4\pi \times 10^{-7} \times 4.5325 \times 10^8 \times 0.1 \\
 &\quad \times \ln \left[\frac{1.0706 + (1.0706^2 + 1^2)^{1/2}}{1 + (1 + 1^2)^{1/2}} \right] \\
 &= 4\pi \times 10^{-7} \times 4.5325 \times 10^8 \times 0.1 \times 0.04914 \\
 &= 2.797 \text{ T}
 \end{aligned}$$

此即螺管中心軸中心點的磁場。由於 (6) 式只考慮線圈的內徑，因此只適用非常薄的線圈。(8) 式同時考慮線圈內外徑等幾何因素，因此可以適用於非常厚的線圈。由於本計畫所研製的線圈的內徑很大，外面只繞八層，屬於非常薄的線圈，因此利用 (4) 式所得的結果 2.797 T 和利用 (6) 式計算所得的結果 2.843 T 結果相當接近。

3. 計算螺管線圈中心軸以外的磁場

螺管線圈中心軸以外的磁場比中心軸稍大，離開中心軸越遠，磁場越大，最大磁場發生在線圈內側壁。越過線圈內側壁後，磁場又逐漸縮小，其情況如圖 7 所示。最大磁場和中心軸磁場的比值 B_m/B_0 值和線圈的形狀有關，如以 α 及 β 代表決定線圈形狀的兩個參數，則 B_m/B_0 值和線圈形狀的關係如圖 8 所示，其值在 1.01 和 2.5 之間。 β 值越小， B_m/B_0 值越大。亦即線圈的長度內徑比越大，最大磁場的值越接近中心軸磁場的值。螺管內側壁中心點的磁場可以由螺管最大磁場計算。螺管的最大磁場從圖 8 得知當 $\alpha = 1.0706$ ， $\beta = 1$ 時， $B_m/B_0 = 1.17$ ，因此

$$B_m = 1.17 \times 2.797 = 3.273 \text{ T}$$

欲求圓圈中心軸以外任意點的磁場如圖 7 及圖 8，係從磁勢 (magnetic potential) 導出。圓圈導線上任一點 P (圖 9) 的磁勢如下列公式⁽⁴⁾ 所示：

$$\begin{aligned}
 A(r, z) &= \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{a d\phi}{R} \\
 &= \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{2a \cos \phi d\phi}{(a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos \phi)^{1/2}}
 \end{aligned} \quad (9)$$

其中

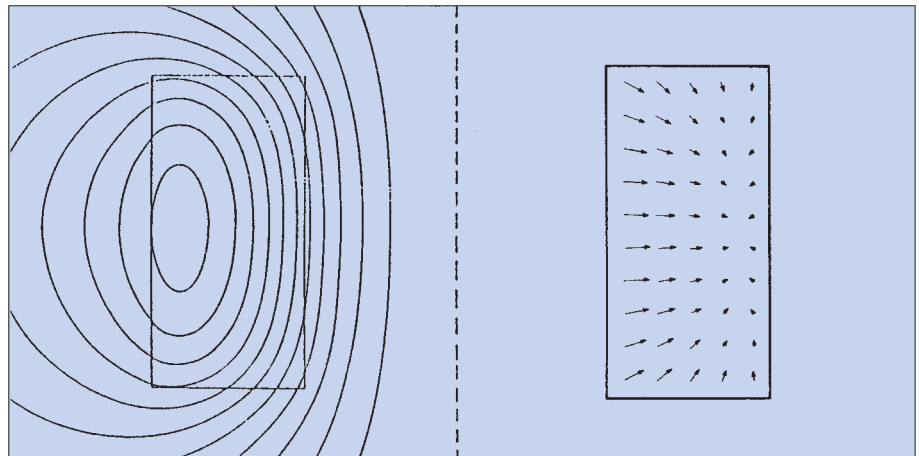
- A ：磁勢，單位為 /m 或是 N/A；
- a ：線圈的半徑，單位為 m；
- r ：線圈中心和點在線圈平面上的投影點的距離，單位為 m；
- ϕ ：線圈上任意點和線圈中心點及點之投影點連線的夾角；
- z ： P 點離線圈平面上的高度，單位為 m；
- R ：線圈上任意點和點的距離，單位為 m，其值為

$$(a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos \phi)^{1/2}$$

(9) 式可由橢圓積分表示，其結果如 (10) 式所示：

$$A(r, z) = \frac{\mu I}{4\pi} \left(\frac{a}{r} \right)^{1/2} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K - E \right] \quad (10)$$

圖 7.
線圈上磁場的分佈。



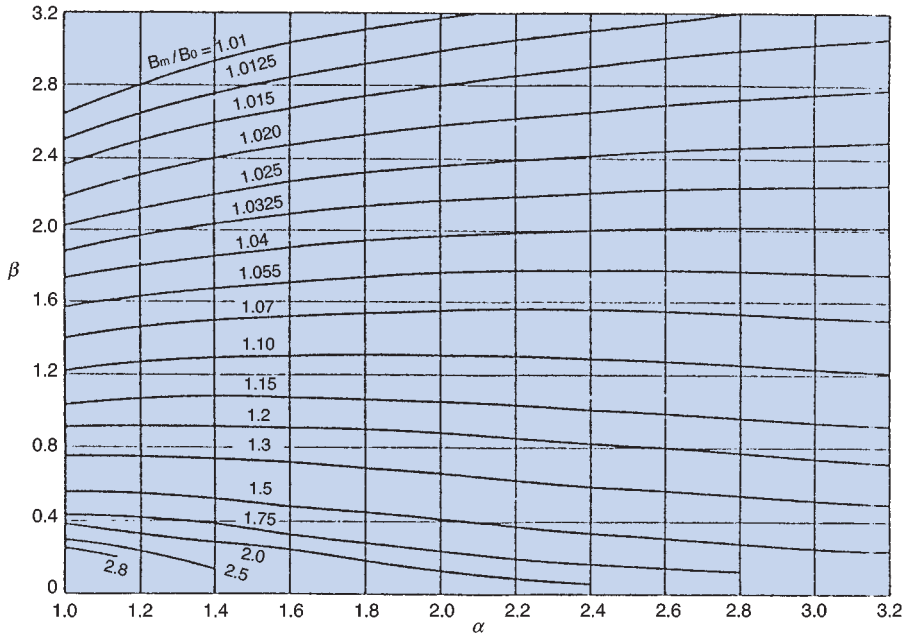


圖 8. 線圈上最大磁場的計算。

其中

$$k^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2} \quad (11)$$

$$2\theta = \pi - \phi \quad (12)$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \quad (13)$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta \quad (14)$$

(13) 及 (14) 兩式是橢圓積分，其值可以由多項式表示，結果如 (15) 及 (16) 式所示。

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right] \quad (15)$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} + \dots \right] \quad (16)$$

P 點的磁場可以由 (10) 式微分求得，其結果如下式所示：

$$B_r = -\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\mu I z}{2\pi r [(a+r)^2 + z^2]^{3/2}} \quad (17)$$

$$B_z = -\frac{\partial(rA)}{\partial z} = \frac{\mu I}{2\pi [(a+r)^2 + z^2]^{3/2}} \left[-K(k) + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) \right] \quad (18)$$

(17)、(18) 兩式所求得的是一個圓圈導線所產生的磁場。一個線圈所產生的磁場則必須把所有圓圈導線所產生的磁場相加。

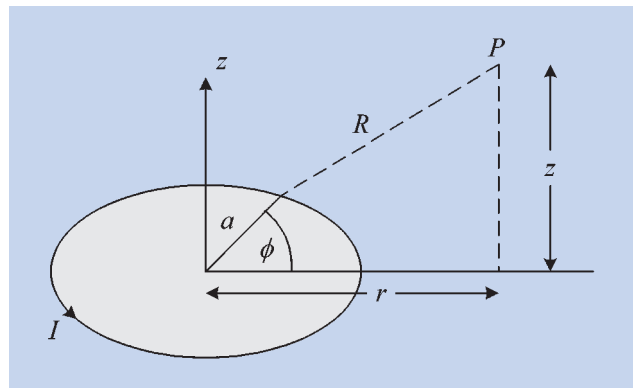


圖 9. P 點和線圈的相對位置。

(1) 線圈上磁場的計算過程

超導線圈中心軸上的磁場只有軸向磁場，磁力線沿著線圈軸的方向。離開超導線圈中心軸以外任何點的磁場，除了軸向磁場之外還有徑向磁場，亦即磁力線沿著線圈半徑的方向。線圈內任何點的磁場強度是在那一點上軸向磁場和徑向磁場的向量和。線圈中心軸以外任何點磁場強度的計算必須使用 (17) 式及 (18) 式。(17) 式計算徑向場，(18) 式計算軸向磁場。由於 (17) 式及 (18) 式的使用需要包括 (11)、(13) 及 (14) 式，整個計算過程相當複雜，需要用電腦計算。電腦計算過程如下：

首先給所欲計算磁場位置的座標和之值，利用 (11) 式計算 k 值。

由計算所得之值從 (15)、(16) 式計算 $K(k)$ 、 $E(k)$ 值。

由計算所得之 $K(k)$ 、 $E(k)$ 值計算 B_r 、 B_z 值。 B_r 、 B_z 值分別代表一圈線圈所造成的徑向及軸向磁場。最後把圈所造成的徑向及軸向磁場利用重疊原理各自相加，求得徑向及軸向總磁場。

由計算所得的 B_r 、 B_z 方向總磁場再算出兩者的向量和及方向，此即座標為 (r, z) 的磁場的大小及方向。

第三項所提及的重疊原理係指空間上某一點的磁場是各導線所產生磁場的總和。假設線圈共繞有八層超導線，每一層繞 200 圈，每一圈都能獨立產生一個磁場，空間上某一點的磁場是這圈所產生磁場的總和。為計算每一導線所產生的磁場，導線的位置必須用座標予以準確定義。假設導線的半徑為 0.001 m，繞在半徑為 0.1 m 的不鏽鋼圓筒上。假設以圓筒的中心軸定為 $r = 0$ ，則第一層導線的中心點在 $r = 0.1005$ m 上。由於第二層繞在第一層導線間的隙上，因此第二層的中心點在 $r = 0.101366$ m。第 n 層的位置在

$$r = 1.005 + 0.00866(n - 1) \quad (19)$$

依 (19) 式計算，最後一層 (第八層) 的位置在 $r = 0.10656$ m，最外層的外緣是 $r = 0.10706$ m。在軸向的座標 (z 值) 方面，假設最內層第一條線圈在 $z = -0.1$ m 上，第二條在 $z = -0.099$ m，則第 n 條線

圈在

$$z = -0.1 + 0.001(n - 1) \quad (20)$$

最後一條 (第 200 條) 的位置在 $r = 0.099$ m 上。第一條的外緣在 $r = 0.1005$ m，最後一條的外緣在 $r = 0.0995$ m 上。

由於第二層繞在第一層導線間的隙上，因此第二層的第一條線在 $r = -0.0995$ m 上，最後一條在 $r = 0.1$ m 上。接著第三層的位置又和第一層相同，第四層和第二層相同。以此類推，奇數層的位置都相同，偶數層的位置也都相同。各條導線的座標位置如圖 6 所示。

在電腦程式中首先計算第 101 條線圈 (座標在 $r = 0, z = 0$) 在 $z = -0.1$ m 至 $z = 0.099$ m 及 $r = 0$ 至 $r = 0.1$ m 的範圍內所產生的磁場， z 值每隔 0.001 m 計算一次，共計算 200 個位置上的磁場。每一個位置代表導線的位置，給予編號從 1 編至 200。 r 值每隔 0.02 m 計算一次，頭尾共有 6 個位置，因此總共要計算 $r = 1200$ 個位置。第一層 200 個線圈對線圈上某一點所產生的磁場可以看成每一個線圈所產生的磁場相加和。

由於線圈是繞八圈，第二圈在 $r = 0.101366$ m 位置上所產生的磁場必須重複以上的計算過程再計算一次，如此重複八次，然後再相加，即得線圈所產生的磁場。

(2) 線圈外的空間磁場分佈的計算結果

線圈通上電流後所產生的磁場在線圈所圍成的空間上非常大，在線圈的外面比較小，且隨著距離增加，磁場急劇減少。由於線圈所產生的磁場可能會對儀器及導航系統產生干擾，為防萬一，線圈所產生的磁場及分佈必須加以了解。超導線圈上的磁場採用 (9) 式所導出的 (17) 式及 (18) 式計算。在使用 (17) 式及 (18) 式計算磁場時，(17) 及 (18) 式內有 $K(k)$ 及 $E(k)$ 。 $K(k)$ 及 $E(k)$ 值可從 (15) 式及 (16) 式求出，但因 $K(k)$ 及 $E(k)$ 係無限級數，計算過程複雜，必須使用電腦計算。(15) 及 (16) 式中要計算多少項才能使 $K(k)$ 及 $E(k)$ 有足夠的準確度和 (15) 及 (16) 式的收斂快慢有關。由於 (15) 式及 (16) 式

係 k 值的函數， k 值的大小可由 (11) 式看出是 r 和 z 的函數。從下列的關係式可以證明 (11) 式中的分母大於分子，

$$|(a+r)^2 + z^2| - 4ar = |(a-r)^2 + z^2| \geq 0$$

亦即值除了在 $r = a$ 及 $z = 0$ 同時滿足時 $k = 1$ 之外， k 值是一永遠小於 1 的值。值越小，亦即越接近或越大，(15) 及 (16) 式收斂越快。從 (11) 式可以看出當 $r = 0$ 時， $k = 0$ 、 $K(k) = E(k) = 1$ 。

由 (15) 及 (16) 式計算 $K(k)$ 及 $E(k)$ 值的收斂情形顯示 z 越接近 0 或 r 越接近 0.1 m， $K(k)$ 及 $E(k)$ 值收斂越慢，其中 $K(k)$ 的收斂又比 $E(k)$ 慢。為了不影響精確度，在電腦程式中， $K(k)$ 及 $E(k)$ 值的計算依其收斂程度計算到從 21 項到 101 項。

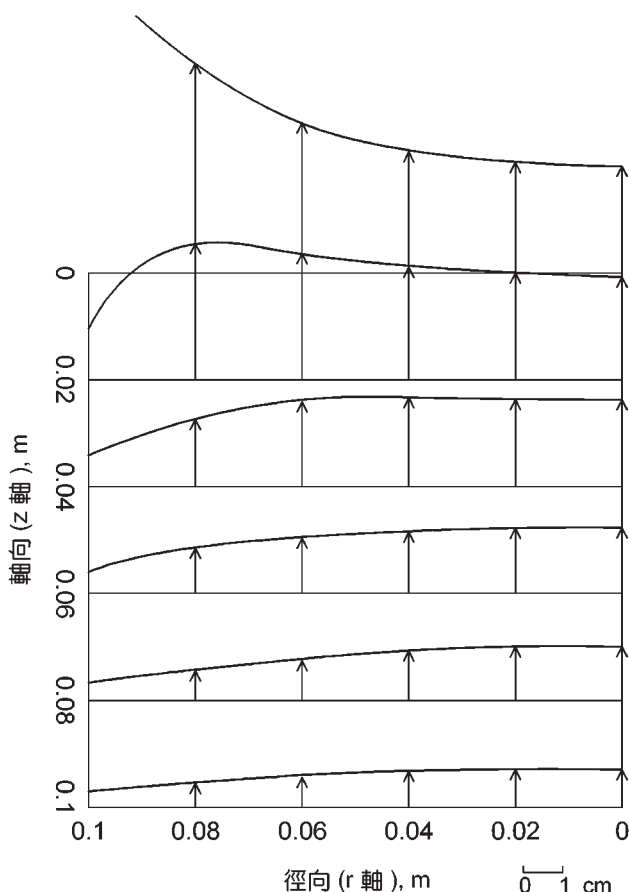


圖 10. 電流為 400 A 的單圈線圈的軸向磁場，箭頭長度代表磁場強度，每 1 cm 代表 10^{-3} T。

假設一圓圈導線中心點的位置在 $r = 0$ 、 $z = 0$ 上，圓圈的半徑為 $r = 0.10005$ m，則利用上述的電腦程式求得在空間上的磁場分佈，結果如圖 10 所示。圖 10 及圖 11 分別是軸向磁場、徑向磁場和線圈位置的關係圖。從這些資料可以看出 $z = 0$ 時軸向磁場最大，遠離軸後磁場慢慢減小。徑向磁場在 $z = 0$ 的時候為 0，在 $r = 0$ 的時候也是 0。在 $z = 0$ 、 $r = 0.1$ m 的軸向磁場是 0.162 T。

把線圈上各點的磁場大小及方向繪成圖形，結果如圖 12 所示。在此圖中的長方形方塊是線圈所在的位置，從這一圖可以看出線圈內部中心點 ($z = 0$) 磁場非常強，越離開中心點磁力線逐漸發散，磁場也逐漸減弱。在線圈的外側磁場強度急劇降低，在離線圈中心軸的地方，磁場強度只剩下 0.0021 T。

(3) 線圈內部磁場分佈的計算結果

由於超導線有臨界磁場的限制，超導線所暴露的磁場超過某一臨界值，將失去超導性。另外超導線所流通的電流和其所產生的磁場產生一巨大作用力，這一作用力的大小必須在導線能夠忍受的範圍內，否則將破壞超導線圈。因此超導線上每一點的

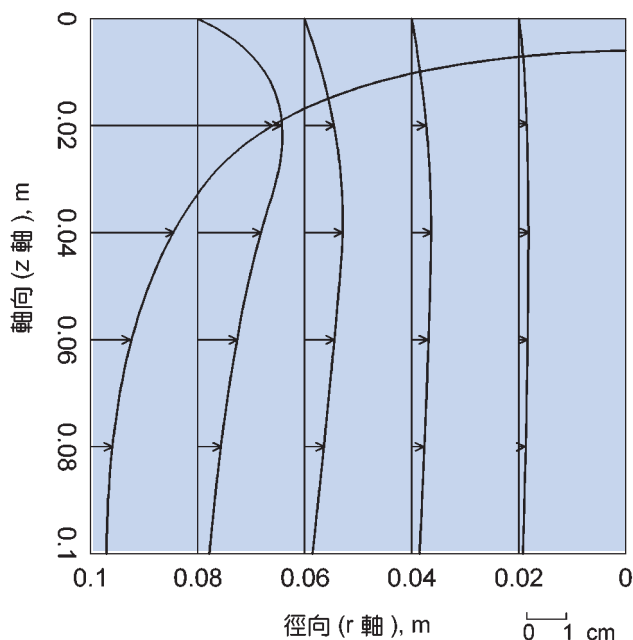


圖 11. 電流為 400 A 的單圈線圈的徑向磁場，箭頭長度代表磁場強度，每 1 cm 代表 10^{-3} T。

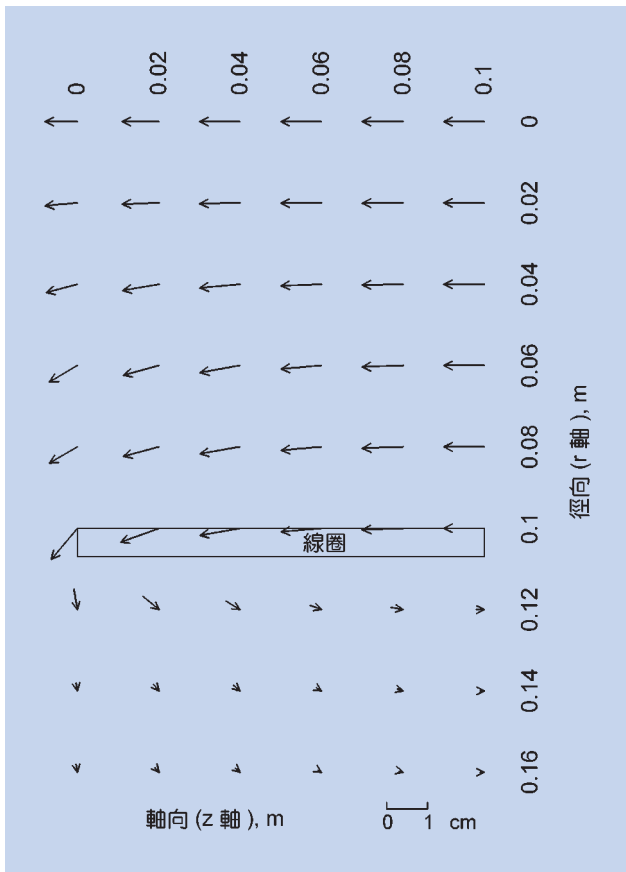


圖 12. 直徑及長度都是 0.2 m 的線圈上繞八層線圈，每層 200 圈，通電 400 A 時線圈上各點的磁場分佈，箭頭長度代表磁場強度及方向，磁場強度每 1 cm 代表 2.5 T。

磁場的大小必須準確予以計算。

超導線圈上的磁場採用 (9) 式所導出的 (17) 式及 (18) 式計算各點磁場在徑向及軸向的分向量，結果分別如圖 13 所示。在圖 14 上方格的左側是線圈的內側壁，右側是外側壁，圖上垂直八條線代表八層線圈的位置。圖的上面是線圈的上端，下面是線圈的中心。圖上水平的十一條線分別代表第 1、11、21、31 及最後第 101 條線圈的位置。圖 13 上的箭頭每一公分代表 1 T，箭頭顯示該位置的磁場及方向。徑向磁場是朝線圈的外面，最大的徑向磁場發生在線圈的上下兩端，線圈的中心徑向磁場是零。最大的徑向磁場發生在線圈第四層的上下兩端，其值是 0.78 T。在線圈兩端內外層之間徑向磁場強度的差異不大，在 0.43 T 至 0.78 T 之間。為

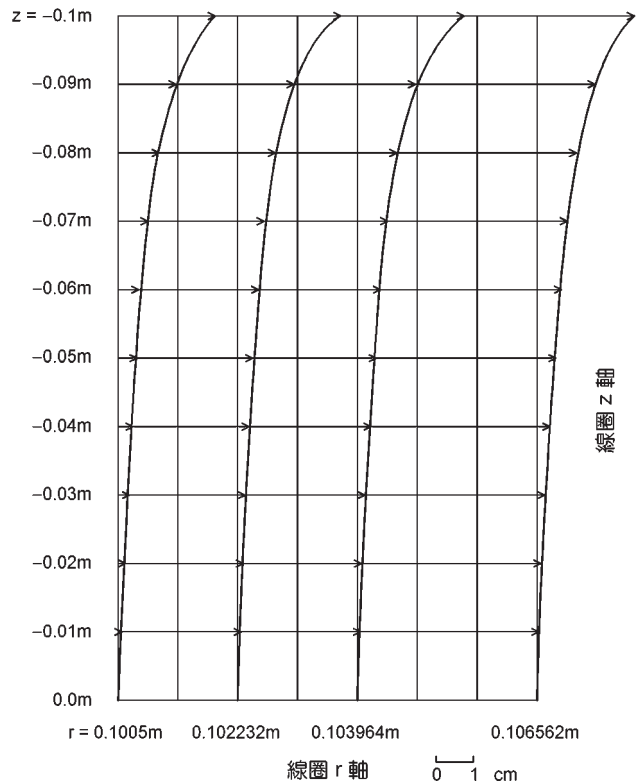


圖 13. 線圈內部超導線所占部份的徑向磁場，每 1 cm 代表 1 T。

避免曲線過多擁擠，圖 13 只繪出第一層、第三層、第五層及第八層的徑向磁場。徑向磁場在線圈的上下兩端最大點，然後急劇下降，在線圈的中心點為零。

把軸向磁場資料繪成圖形，結果如圖 14 所示，此圖上的箭頭每一公分代表 1 T，箭頭顯示該位置的磁場及方向。從此圖可以看出在線圈的外側壁，磁場的方向是向上的，在線圈的外側壁，磁場的方向是向下的。磁場反轉的位置發生在線圈從內側算起第六層和第七層之間。從圖中可以看出最大的磁場軸向磁場發生在線圈內側壁的中心線上，其值為 0.7 T，最小磁場是零，發生在第六層和第七層之間。線圈中心 ($z = 0$) 的軸向磁場最大，線圈上端 ($z = -0.1$ m) 的軸向磁場最小。線圈內側壁上端的磁場是 0.6 T。

線圈內部各點徑向及軸向磁場的向量和，亦即絕對磁場的大小，如圖 15 所示，圖上每一點的數字代表該點的磁場強度。圖 15 也顯示線圈內部的

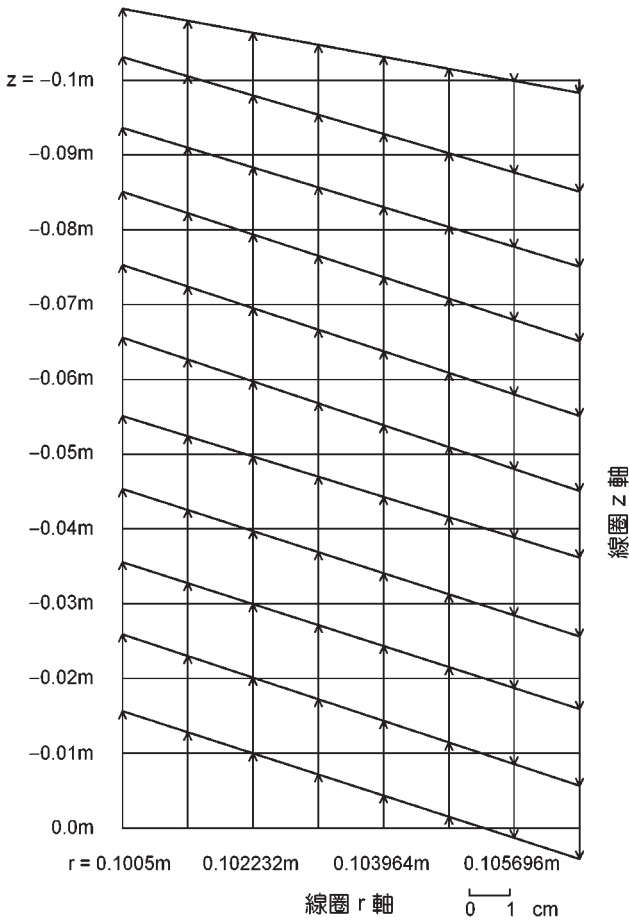


圖 14. 線圈內部超導線所占部份的軸向磁場，每 1 cm 代表 1 T。

等磁場曲線。從此圖可以看出線圈的內側壁磁場最強，沿著線圈的軸越往外移，磁場逐漸遞減，但當接近線圈的外側壁時，磁場又增加。在線圈中心平面 ($z = 0$) 靠外側的地方 ($r \neq 0.10526$ m) 有一零磁場點。等磁場曲線沿著此零磁場點一圈一圈的往外擴展，越往外面，磁場越強。線圈頂端的磁場也非常強，最大的磁場是 2.9767 T，在線圈第二層的頂端。線圈頂端有如此強的磁場是由於徑向磁場相當強之故。比較圖 7 及圖 15 可以看出兩者的等磁場分佈線大約相似，最大磁場發生在線圈內側壁，最小磁場發生在靠近外側壁的中心點。兩者之間不同的是圖 15 上線圈頂端的磁場相當強，而圖 7 上頂端的磁場並不很強，因此等磁場分佈線稍有不同。兩者的磁場分佈不同可能是因為線圈的形狀不同，圖 7 的線圈用於產生磁場，線圈所圍的空間較

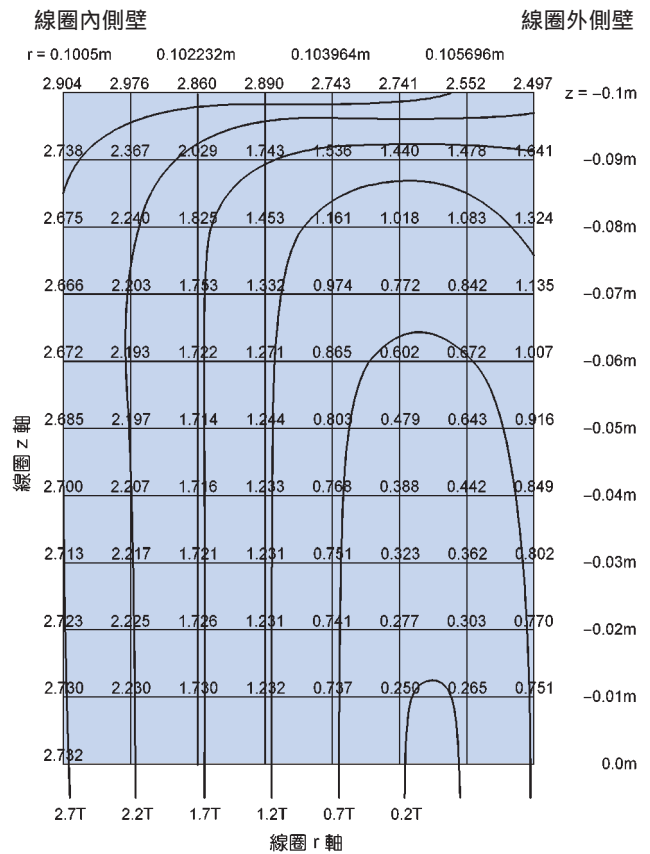


圖 15. 線圈內部超導線所占部份各點的總磁場及等磁場曲線圖。

小。以磁場所占的空間和線圈厚度相比，線圈變成相當厚。圖 15 的線圈用於儲存能量，線圈所圍的空間越大越有利，以磁場所占的空間和線圈厚度相比，線圈變成非常薄，其高度為 0.2 m，而線圈厚度僅有 0.007062 m。

遠離線圈之後，亦即離開圖 15 上的方格，磁場將急速減小，尤其以外側為甚，故 0.7 T 的等磁場曲線是一不連續線。圖 16 代表線圈內部各點磁場的絕對值大小及方向。箭頭長度是每公分代表 0.15 T。從此圖隱約可以看出磁力線的方向及強弱，在線圈中心平面上靠近外側的磁場最小。

三、結論

本文使用三種方法計算線圈的磁場，前二種方法非常簡單，但只能求得線圈中心軸上的磁場。第

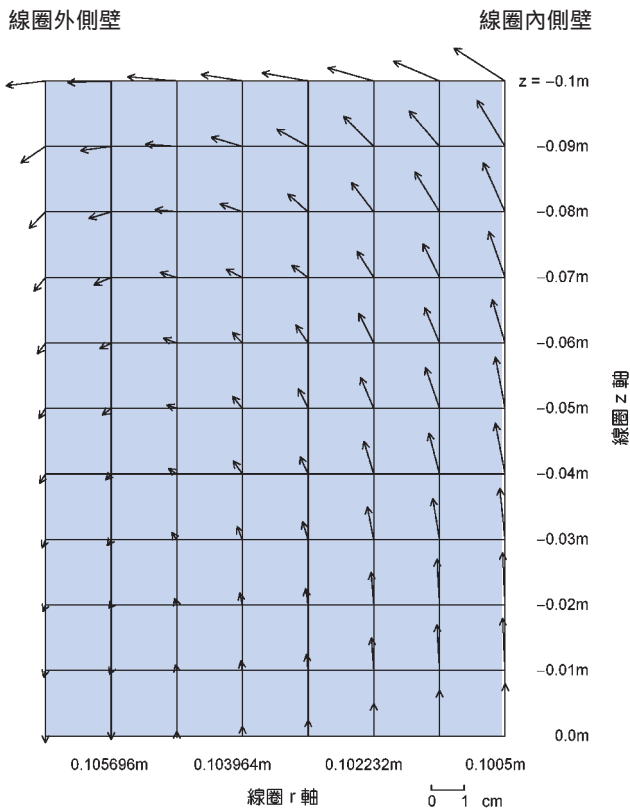


圖 16. 線圈內部超導線所占部份各點的總磁場大小及方向，每 1 cm 代表 3.15 T。

三種方法利用橢圓積分，非常複雜，必須利用電腦才有辦法計算，但第三種方法可以求得空間任意點的磁場。

本文中使用的第三種方法，以 Basic 語言發展出一套電腦軟體計算線圈上任意點的磁場，包括線圈所圍成的空間的磁場的強度與方向，以及線圈所占地方的磁場大小方向。比較三種方法對線圈軸的中心點、中心軸兩端，以及內側壁中心點所計算的磁場的大小，發現其差異不大。另外所繪出的等磁場曲線和文獻所記載的等磁場曲線差異不大。從此二者可以證明本章所發展出來的軟體基本上是正確的。

從第三種方法的計算結果顯示線圈的內側壁及線圈上下兩頂端的磁場最大，以通電 400 A 的電流而言，磁場高達 2.9 T，線圈中心平面靠近線圈外側壁的地方有零磁場點。線圈側壁和線圈外側壁的磁場方向相反。

參考文獻

1. J. D. Kraus, *Electromagnetics*, 2nd, McGraw-Hill (1973).
2. B. D. Cullity, *Introduction to Magnetic Materials*, Addison-Wesley (1972).
3. 荻原宏康編著，賴耿陽譯編，超導體應用工學，復漢出版社 (1986).
4. M. N. Wilson, *Superconducting Magnets*, Oxford (1989).