

氣體稜鏡技術應用於氣體折射率量測

A Novel Gas-prism Applied on the Inspection of Gas Refractive-index

杜星旻、韋安琪、施至柔

Hsing-Min Tu, An-Chi Wei, Jyh-Rou Sze

本研究利用氣體稜鏡技術即時檢測氣體折射率，利用光學稜鏡與待測氣體產生不同偏折角，再搭配 Shack-Hartmann 波前檢測架構，可換算出實際波前傾斜角度變化量，進一步推算出該氣體折射率。相比於一般量測稜鏡偏轉角之氣體折射率量測系統，藉由 Shack-Hartmann 波前檢測儀之微透鏡陣列，可以使取樣更多且更精確地取得偏轉角及氣體折射率。

In this research, we present a new system for real-time inspection of gas refractive-index. The system combines with an optical prism to measure the refraction by the deviation angle. A Shack-Hartmann wavefront sensor is also used in this system to analyze the wavefront change resulting from the different refractive indexes of gas. In this system, we use a plane wave as a light source to collaborate with the wavefront sensor. Also, the system applies a single-light-path design which is easier for adjustment or calibrations.

一、前言

Shack-Hartmann 波前檢測儀又稱透鏡陣列式波前檢測儀，其前身為 Hartmann 波前檢測儀^(1, 2)，如圖 1。Hartmann 波前檢測儀並沒有透鏡陣列 (lenslet array)，因此精度與靈敏度皆較差⁽³⁾。其主要運用於天文望遠鏡上，用以偵測大氣中的波前變化，並且針對觀測到的影像做補償，以得到原始觀測影像。

Shack-Hartmann 波前檢測儀被廣泛運用於檢測透鏡等光學元件之像差，像差經轉換以獲得點擴散函數 (point spread function, PSF)，如圖 2 所示；點擴散函數再經轉換可得透鏡之調制傳遞函數 (modulated transfer function, MTF)，用以分析透鏡之特性。

波前檢測另一常見之檢測方式為使用干涉儀，利用共光路之兩道光進行干涉，並將干涉圖還原成波前圖，即可得知原始波前，但是干涉對於系統穩定度要求較高，若有震動等狀況，將會難以觀測干涉結果。因此依照不同需求，須選擇不同的波前檢測儀器⁽⁵⁾。

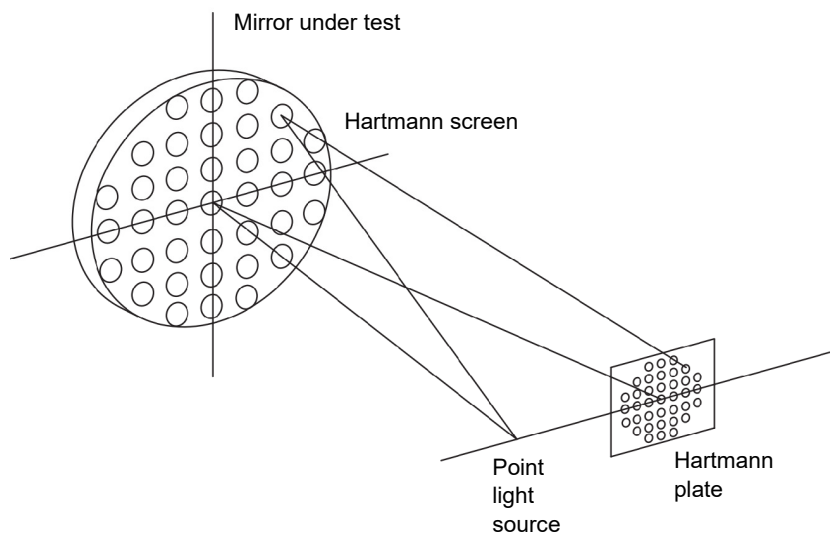


圖 1. Hartmann 波前檢測儀示意圖^(1,2)。

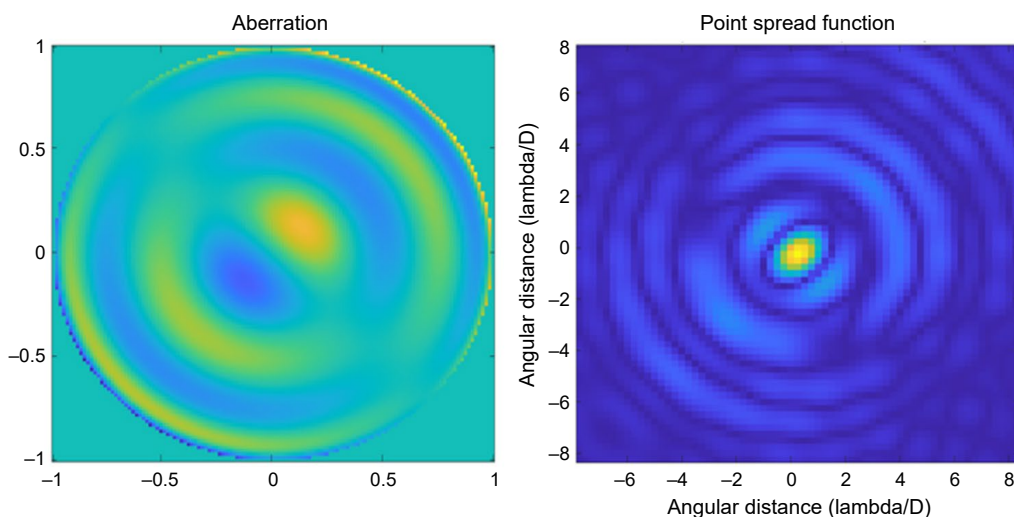


圖 2. 左：波前像差，右：該波前像差之點擴散函數。

Shack-Hartmann 波前檢測儀的精度主要受限於微透鏡陣列，近年來隨著微透鏡陣列製程之進步，其靈敏度也隨之大幅提升。而在提升靈敏度的同時，動態範圍也隨之降低，此兩者呈反比關係，故設計系統時，要在靈敏度與動態範圍間取得平衡。此外，現今 Shack-Hartmann 波前檢測儀技術也相當多元，例如 L. Seifert 等人提出使用 LCD 取代透鏡陣列之概念，其又稱為適應性 Shack-Hartmann 波前檢測儀⁽⁶⁾。

共光路 (common light path) 通常用於討論相位之研究，例如干涉⁽⁷⁻¹⁰⁾ 等。然而共光路系統對實驗環境有較高需求，因此也有為改善共光路之缺點，延伸出單光路設計之光學系統⁽¹¹⁾。本研究主要運用幾何光學之稜鏡偏轉角原理，並結合波前檢測進行量測，因此光路設計上，單光路即可滿足本實驗需求，且單光路相較於共光路等較複雜之光路架構，其更易於校正，對於實驗系統之穩定有一定之幫助。

另一方面，許多領域需求氣體折射率量測技術⁽¹²⁻¹⁴⁾，例如：量測氣體折射率可以得知該氣體在不同壓力之氣體密度，並由氣體密度推得熱力學溫度 (thermodynamic temperature)^(15, 16)。部分雷射光使用氣體激發，因此為確保其發光品質，需要檢測該氣體之純度、混合程度等，使用氣體折射率以確認之^(17, 18)。氣體折射率也可以用來分析空氣中之氣體混和成分⁽¹⁹⁾，例如環境二氧化碳檢測、開放式散熱系統之散熱媒介與空氣混合程度等。透過光學非接觸式的檢測方式，並不會打擾到原系統的運作，亦可以得到量測結果。氣體折射率的量測方式，普遍會使用麥克森干涉儀 (Michelson Interferometer)^(9, 20)，如圖 3 所示。光路經由光源出發，經中間之分光鏡後產生兩道光，並在另一端進行共光路之干涉。藉由觀察屏幕上之干涉條紋數量，計算出光程差 (optical path difference)，經過換算得到折射率，然而麥克森干涉儀對環境靈敏度要求較高，若有震動等外在環境的因素影響，干涉條紋會劇烈變化，導致其難以觀察。因此在動態系統中，麥克森干涉儀等運用傳統光學干涉方式之量測系統會較難發揮。此外，麥克森干涉儀除了可以用來量測氣體折射率，其也可被用來量測表面輪廓、相位等資訊，用途相當廣泛。

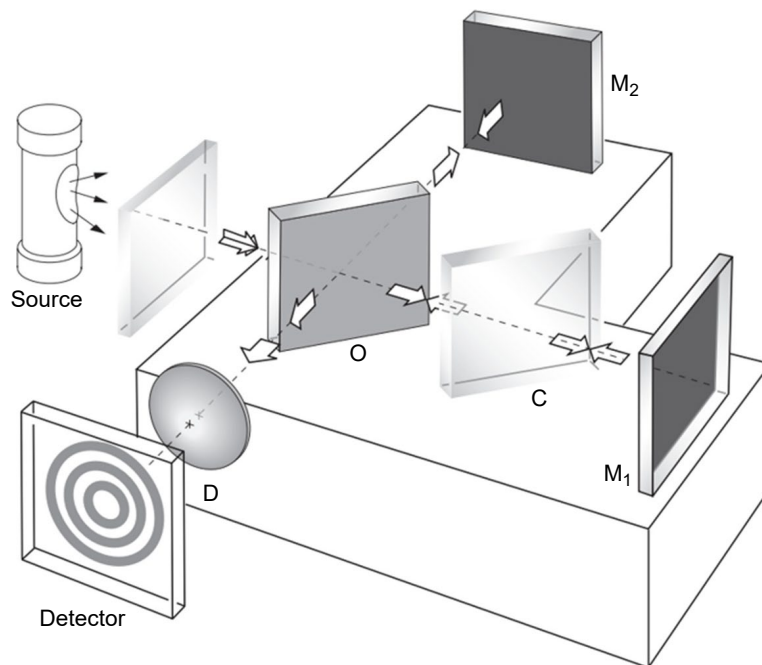


圖 3. 麥克森干涉儀⁽⁴⁾。

近年來，為改善麥克森干涉儀之靈敏度問題，光纖取代了麥克森干涉儀中之傳統透鏡式的光路系統⁽²¹⁾，光纖干涉儀對環境靈敏度極佳，且光纖可以承受一定程度之彎折，可以克服更嚴苛之量測環境。但也由於光纖製程之限制，因此其精度等皆會因為光纖尺寸的極限而有所限制。

另一種量測氣體折射率的方式，是利用稜鏡偏向角的特性，通常使用雷射光束作為光源，當光通過稜鏡後，由於另一端為不同折射率之氣體，會產生不同之偏向角，再藉由偏向角的不同，以回推出該氣體折射率⁽²²⁻²⁴⁾，但此種系統精度很難提升，且使用單一雷射光判斷折射角度，會因為雷射光斑造成界定不易，易有誤差產生。

此外，藉由光譜特性，或是二次諧波 (electric-field-induced second harmonic generation, ESHG) 與三次諧波 (third harmonic generation)，亦可測量氣體折射率⁽²⁵⁻³¹⁾。前述之量測方式為量測非線性氣體折射率 (nonlinear refractive index)，其系統需考慮偏振等問題。除了用量測的方式得到氣體折射率外，Edlen 於 1965 年利用大量實驗結果得出經驗公式，其利用空氣的壓力、溫度、濕度和二氧化碳濃度推算出該空氣之氣體折射率，後續也有不少人提出此經驗公式之修正，使其精度更為提升⁽²⁹⁾。然而隨著量測技術的進步，更簡便之量測方式即可取代該公式。

二、設計理論與方法

為了量測氣體折射率以評估散熱系統之效果，本研究研製氣體折射率量測系統⁽³⁰⁾。本系統之光源採用綠光雷射，搭配空間濾波器，過濾掉不需要的高頻訊號，並且經過一準直透鏡，使通過空間濾波器之球面波轉為平面波；光路中設置三角稜鏡，且稜鏡會直接接觸待測氣體，使光路因折射率不同而產生偏折，並且可以依照待測氣體之折射率範圍挑選其適合之稜鏡。同時，系統使用 Shack-Hartmann 波前檢測架構，並藉由其中的微透鏡陣列，使波前聚焦於 CCD 上，搭配廣泛運用於波前檢測中之澤爾尼克多項式 (Zernike polynomials)，將多項式中的傾斜 (Tilt y) 項，轉換為波前實際傾斜角度之變化量，以分析出波前折射率變化量，再換算得該氣體折射率，該系統如圖 4 所示。此法藉由透鏡陣列聚焦的多個光點，相較於僅用單一雷射光點，能有效降低誤差。本系統包含三個部分，光源、氣體腔體與波前檢測儀。將前述項建立在一光學平台上，並均有獨立且不相互影響之治具。當需要調整系統時，模組化的各部件可以輕易地移至該指定位置，並不需要拆裝元件與重新校準。此外，目前市面上有許多手持折射率檢測儀器，皆是用以量測液體折射率，透過量測液體折射率，可以得知該液體之糖分濃度等資訊，但市面上沒有手持量測氣體折射率之儀器；本研究可視為一氣體折射率量測儀原型，未來可將本研究中之原理與巧思，重新縮小設計，即有望製作出手持氣體折射率檢測儀並商用。

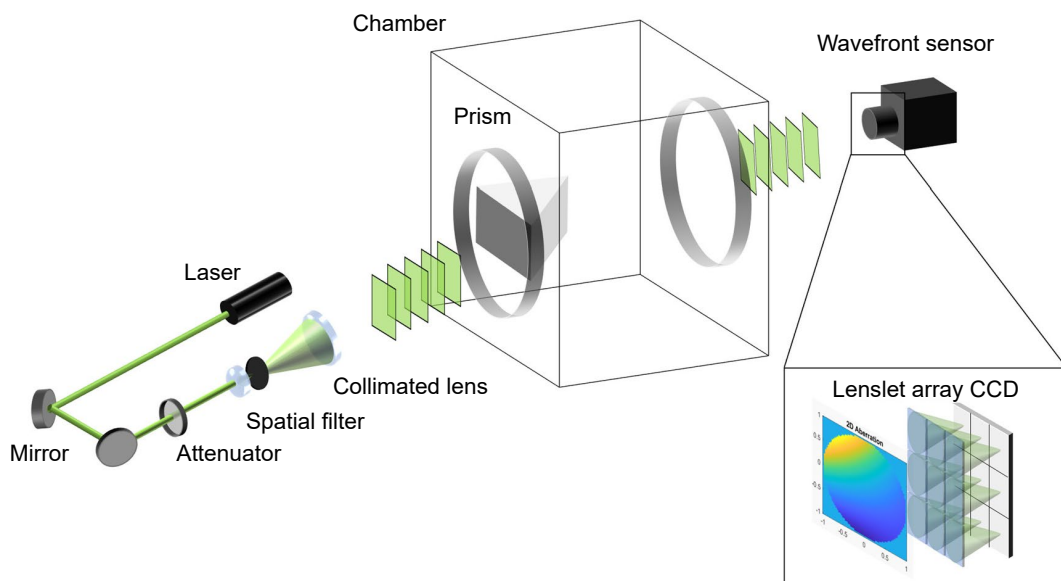


圖 4. 量測系統示意圖。

當光線從一介質傳播至另一種介質時，因為折射率不同，光行進的方向會因此改變，此現象稱為折射定律。本研究即是由折射率出發，進行氣體折射率之量測；透過數次折射定律的換算，推導出折射率與折射角之微分關係式，用以正確量測氣體折射率。如圖 5 所示。其入射角為 θ_i ，入射介質折射率為 n_i ，出射角為 θ_o ，出射介質折射率為 n_o ，兩者關係為：

$$n_i \sin \theta_i = n_o \sin \theta_o \quad (1)$$

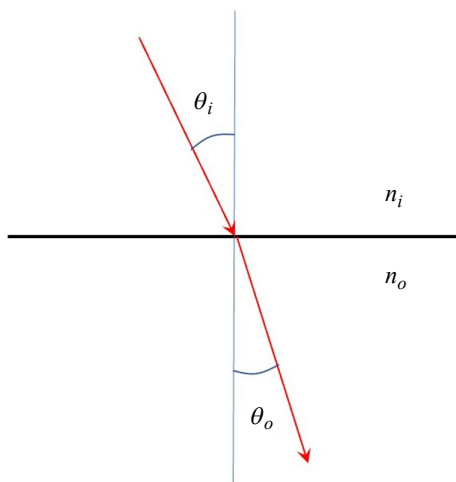


圖 5. 折射現象。

如圖 5 所示，不同的介質折射率，會導致右側出光角度有不同偏折，而偏折角度可以引導至 Zernike 多項式中，藉由波前傾斜項的變化，回推出該 n_2 的折射率。本研究中，入射角為 θ_1 ，當光線入射至待測氣體 (折射率為 n_2) 時，其路徑約與圖 6 中之水平面平行，如此可以確保出射光會穿過腔體另一端之窗鏡，避免光路被腔體遮蔽。不同的稜鏡，會有其對應的入射角。 n_2 的變化量與出射角的變化量之關係為：

$$\frac{dn_2}{d\theta_6} = \frac{\cos \theta_4 \cos \theta_6 n_{air}}{\sin \theta_p} \quad (2)$$

其中， θ_p 為入射光對向稜鏡之角度； $\theta_4 \sim \theta_6$ 可以由幾何光學推得：

$$\theta_4 = \sin^{-1} \left(\frac{\sin \theta_p \sqrt{n_1^2 - n_{air}^2 \sin^2 \theta_1} - \cos \theta_p \sin \theta_1 n_{air}}{n^2} \right) \quad (3)$$

$$\theta_5 = \theta_p - \theta_4 \quad (4)$$

$$\theta_6 = \sin^{-1} \left(\frac{n_2 \sin \theta_5}{n_{air}} \right) \quad (5)$$

三、氣體折射率量測儀之系統架構

當平面波光源入射至稜鏡並接觸待測氣體時，所產生之折射角會因待測氣體折射率不同而產生相對應的變化。本系統以平面波作為光源，檢測該平面波之波前傾斜項，回推出稜鏡

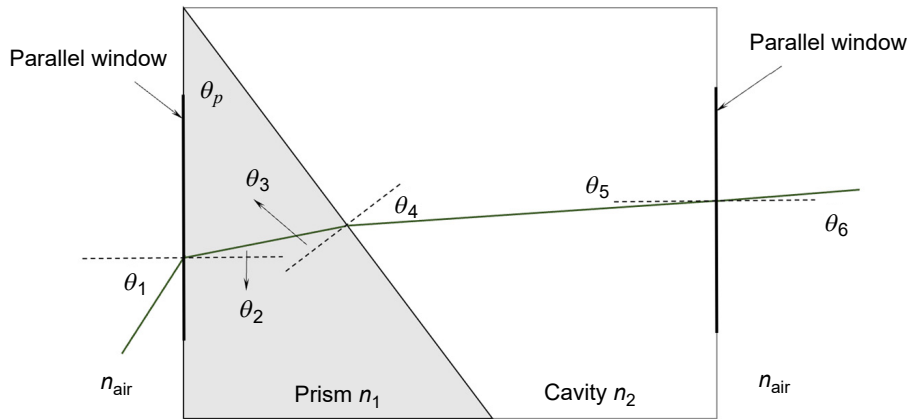


圖 6. 稜鏡偏轉角。

偏轉角，該項係數即為偏轉角之正切函數。並且定義真空時之光波折射率為 1，利用待測氣體與真空狀態之波前的水平傾斜項之差值，回推出偏轉角差值 $d\theta_6$ ，代回 (2) 式，即可得到待測氣體之折射率。整體架構如圖 7 所示。

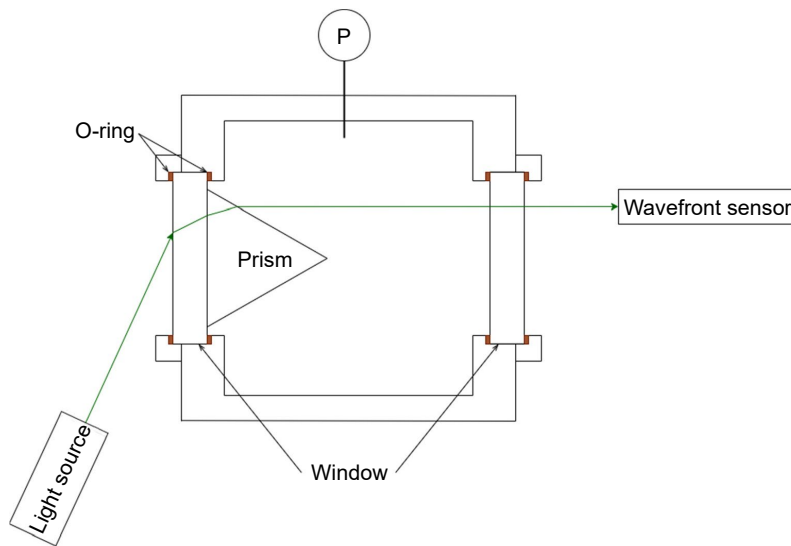


圖 7. 系統架構示意圖。

裝載待測氣體之容器為一金屬製方形腔體，腔體兩側有玻璃視窗，金屬腔體如圖 8 所示。玻璃視窗為預設之光路路徑，將稜鏡貼附於其中一個玻璃視窗上，並直接接觸待測氣體。由於此腔體需要承受內部與環境之壓差，因此腔體與其玻璃視窗須有一定強度，且玻璃與腔體間放置墊圈以確保其密封性。另外，於兩片玻璃視窗之入射面鍍上單層抗反射膜，用以減少系統的雜散光。

整體實驗架構建於一厚度 2 cm 之金屬板上，該金屬板表面為霧面材質，因此可減少因反射產生之雜散光；分別將光源、腔體與波前檢測儀模組化，如圖 9 所示，並且針對入射角需求及各治具之固定位置，於金屬板上鑽孔定位。若未來需調整入射角等，因其已模組化之緣故，因此僅需調整光源治具之固定位置，如此可以減少移動與調整各元件的程序，且移動光源模組後，無須重新校準光源系統。

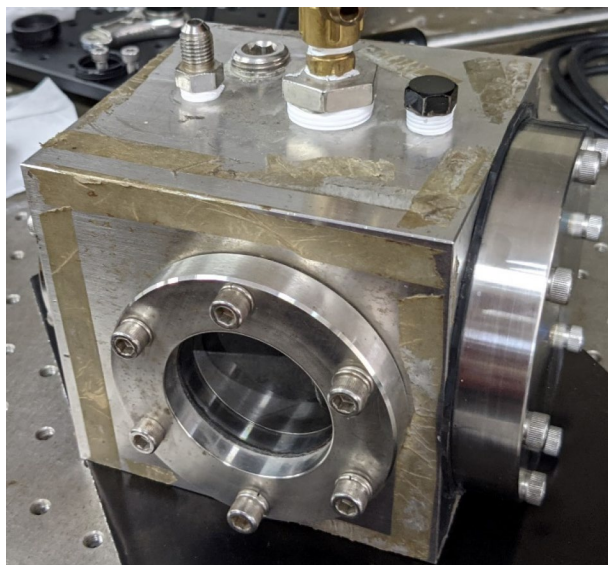


圖 8. 裝載待測氣體之腔體。

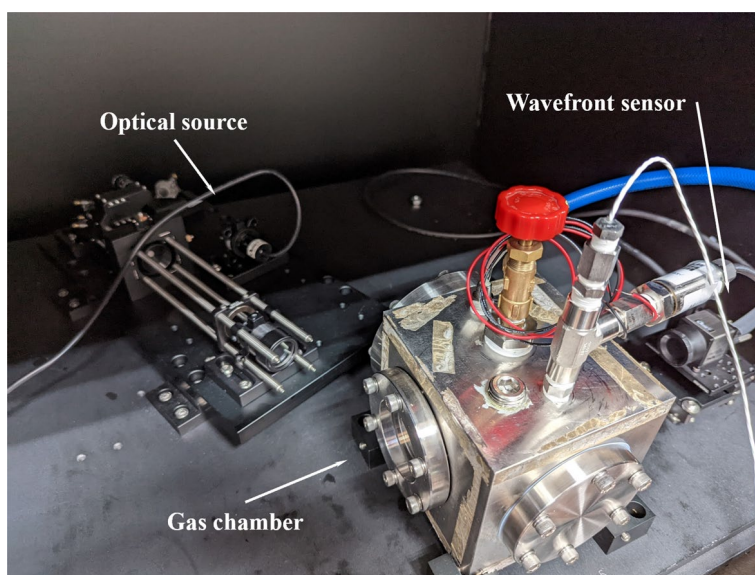


圖 9. 模組化實驗系統。

本實驗使用正三角形稜鏡， θ_p 為 60 度，計算出預期入射角 θ_i 為 68.2 度後，再依照入射角與稜鏡的折射率等，透過 (2) 式，可以計算出本實驗之波前傾角變化對應之折射率變化值，即 $dn_2/d\theta_6$ ，最後，氣體折射率 n_{gas} 可由波前水平傾角 θ_i 及上述參數推得：

$$n_{gas} = 1 + \frac{dn_2}{d\theta_6} \times \theta_i \quad (6)$$

其中，波前水平傾角 θ_i 可從 Zernike 多項式中之第二項的係數回推出：

$$\theta_t = c_2 = \frac{\Delta y}{f} = \frac{\Delta z}{d} \quad (7)$$

c_2 為 Zernike 多項式第二項之係數， Δy 為焦點位移量； f 為透鏡之焦距； Δz 為傾斜波前橫向位移量； d 為透鏡之直徑，示意圖如圖 10 所示。Zernike 多項式採用極座標表示，亦可將其換算得卡式座標表示。 Z_2 使用卡式座標，並增加其係數，可以改寫為：

$$Z_2 = c_2 \times y \quad (8)$$

當角度很小時， c_2 即是此波前傾斜之角度之斜率。

表 1. 系統參數計算。

θ_p	60°
θ_1	68.2°
n_1	1.7946
n_2	1
n_{air}	1.000233 ⁽²⁹⁾
$dn_2/d\theta_6$	0.578480

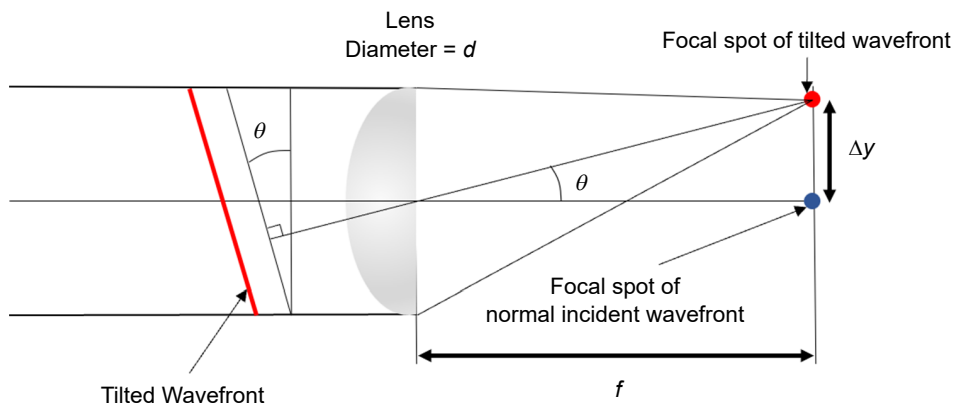


圖 10. 焦點位移量與波前傾斜之關係圖。

使用光學模擬軟體 LightTools，模擬光路與出射角度的變化，模擬如圖 11 所示。

圖 12 左側之稜鏡黏貼於一平板玻璃視窗上。由於入射角為固定角度，且根據折射定律，平板玻璃並不會造成入射角改變，因此光路上省略左方之平板玻璃右側之平板玻璃會直接與待測氣體接觸，折射角會因待測氣體折射率之不同而有所變化，因此右側平板玻璃視窗須納入計算。

模擬結果如表 2 所示，將模擬結果與本論文所提出之公式計算結果比較，可以得到兩者差異為小數點後第四位數，計算出的誤差小於 0.01%。

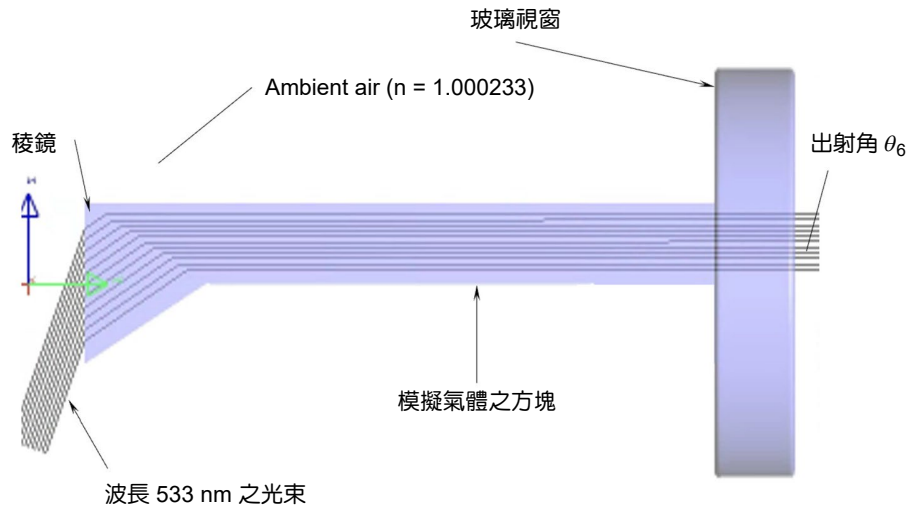


圖 11. LightTools 模擬光路。

表 2. 模擬結果與比較。

參數\方法	LightTools 模擬	理論計算結果
n_{air}	1.000233 ⁽³⁴⁾	1.000233 ⁽³⁴⁾
n_1	1.7946	1.7946
n_2	1	1
θ_1	68.2°	68.2°
$dn_2/d\theta_6$	0.578511	0.578480

此外，表 2 之計算結果採用空氣折射率作為參考值⁽³⁴⁾。為減少誤差，本文將於量測氮氣前，先行量測空氣折射率，並將 $dn_2/d\theta_6$ 之數值利用量測到的環境空氣折射率進行修正，再進行氮氣量測，使氮氣量測結果更貼近真實量測數據。

四、實驗結果與討論

本系統採用平面波之傾斜項的差值計算折射率，實驗時亦記錄每一狀態之波前與氣壓。首先量測腔體於一大氣壓之狀態，記錄氣壓與波前，再用泵浦將腔體抽至約 17 Torr 後，量測該狀態之氣壓與波前並記錄之。擷取波前檢測儀之影像後，輸入自行撰寫之 MATLAB 程式進行 Zernike 多項式中傾斜項之擬合，並將擬合結果換算成偏轉角度，最終得到空氣折射率。

量測後之影像經過程式之擬合後，結果如表 3 所示。其中，由於 Zernike 多項式之係數於擬合後數值過小，因此 Zernike 多項式的係數以 10^3 倍呈現之。經過測得環境之空氣折射率後，將其結果帶入 (2) 式，得修正後之 $dn_2/d\theta_6$ 。本文一共獨立量測五次氮氣折射率，因此每一次之量測前，皆會量測該次之空氣折射率。

表 3. 量測空氣實驗數據。

量測順序	壓力 (Torr)	Z ₂ 係數 × 10 ³	折射率	$dn_2/d\theta_6$
第一次量測	17	0	1	0.578609
	753	0.4933	1.000285	
第二次量測	18	0	1	0.578604
	753	0.4885	1.000283	
第三次量測	18	0	1	0.578638
	754	0.5129	1.000297	
第四次量測	18	0	1	0.578608
	752	0.4932	1.000285	
第五次量測	18	0	1	0.578634
	753	0.5098	1.000295	

為確保整個腔體與管路中無其他氣體存在，因此量測前，需先重複抽灌氮氣三次，以避免影響實驗結果。本實驗使用 99.995% 純度之氮氣，將腔體抽真空後，分次將氮氣灌入，至壓力感測器之最大可承受之壓力約 2400 Torr，並將其繪製成關係圖如圖 12 所示。

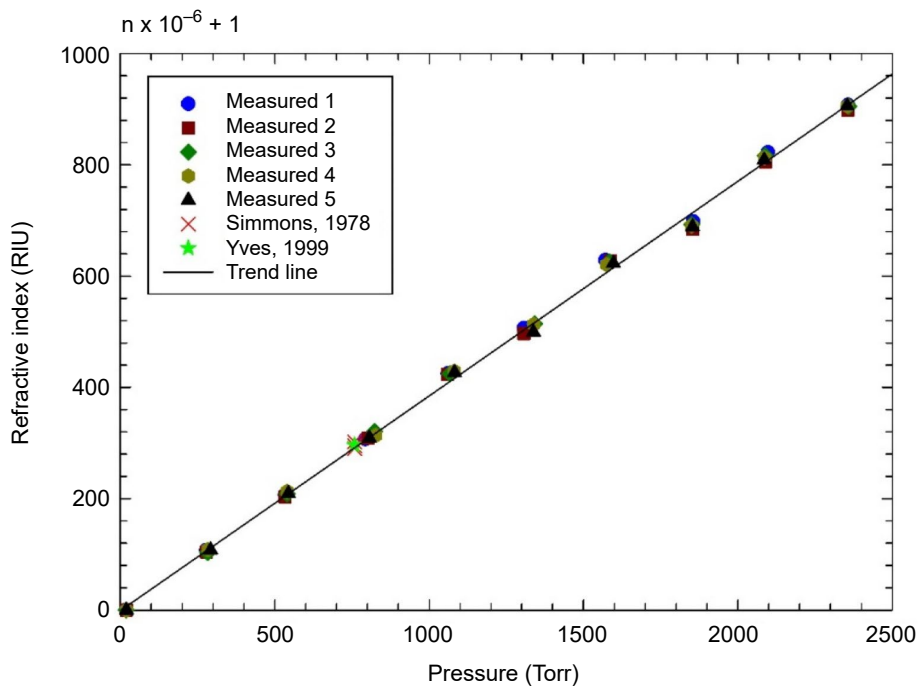


圖 12. 氣折射率量測結果。

由測量結果可知氮氣之折射率與壓力呈現線性關係，將參考文獻^(36, 37)之量測結果亦標於本實驗數據圖上，如圖 12 所示。該兩篇論文係量測一大氣壓下之氮氣折射率，由比較結果可知：本實驗之量測結果與文獻相符。

4.1 誤差分析

4.1.1 正切函數線性討論

當程式算出光通過微透鏡後之焦點位移量，透過下式，可以得到平面波前入射感測器之傾斜角度，示意圖如圖 10 所示。

$$\theta_t = \frac{\Delta y}{f} \quad (9)$$

其中， Δy 為焦點位移量， f 為透鏡之焦距， Δz 為傾斜波前橫向位移量， d 為透鏡之直徑。接著，前述感測結果會透過波前擬合至 Zernike 多項式，並用該多項式之係數來表示波前傾斜角度。由於在 Zernike 多項式中，該係數是波前傾斜之斜率，也會是該傾斜波前之正切函數，換言之，即是用斜率來表示傾斜程度。若要將擬合後的正切函數與波前傾斜角度直接連結，則必須確認正切函數在本論文所探討的角度範圍內是趨近線性關係。

將 $\tan\theta$ 以泰勒展開式改寫如下：

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \dots, \forall \theta: |\theta| < \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

其中 θ 單位為弧度。當 θ 很小時，可以得：

$$\tan\theta \approx \theta, \forall \theta: |\theta| < \frac{\pi}{2} \quad (11)$$

通常當 $\theta < 5^\circ$ 時，(11) 式會成立，即光學中之近軸近似條件。為證明 5 度內之正切函數與其角度為線性關係，使用 MATLAB 將函數繪出，如圖 13。另外，本文所運用之角度範圍小於 2 度。

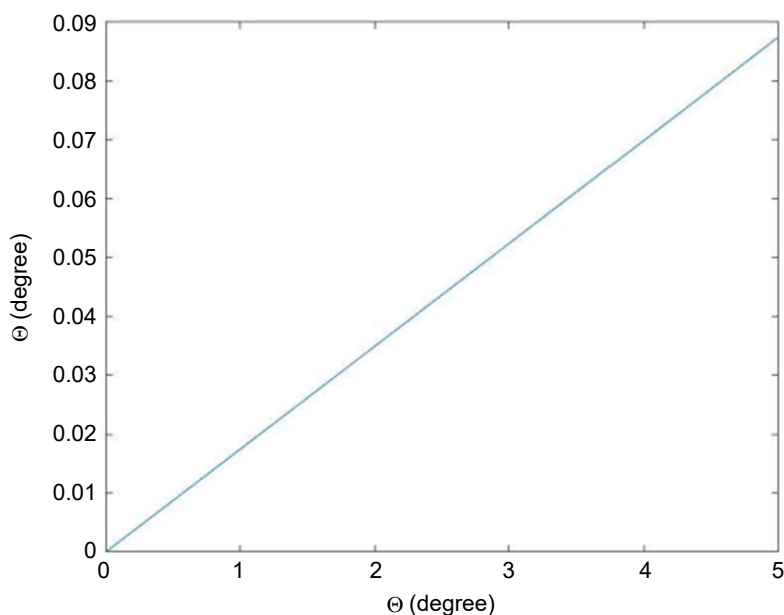


圖 13. 正切函數與角度之關係圖。

4.2 玻璃變形誤差探討

即使腔體玻璃視窗已選用厚度 14 mm 之玻璃，但因腔體內外之壓差，玻璃仍可能變形。本節將探討玻璃變形問題，分析玻璃變形效應，以縮小實驗誤差。

為驗證玻璃是否變形，本研究利用波前檢測儀，量測雷射光行經處之玻璃變形狀況，並以像差來表示結果。雷射光行經處已標記於玻璃上，如圖 14 所示。

有無黏貼稜鏡之玻璃變形量測結果分別如圖 15 與 16 所示，壓力範圍由 2400 Torr (本實驗最大可乘載壓力) 開始降壓至 750 Torr (一大氣壓)，主要觀察壓力差對玻璃變形之影響。由結果可知，經過反射波前量測結果，主要變動項目為 Zernike 多項式之 Z_1 與 Z_2 項的係數， Z_1 為 Tilt x 項 (Vertical tilt, 垂直傾斜項)；觀察本研究所關注的 Z_2 項，其係數變動範圍約 0.02×10^{-3} ，而根據 (6) 式推算氣體折射率，變動範圍僅影響到折射率小數點後第九位數，因此玻璃些微變形在本研究中是可以被接受的。

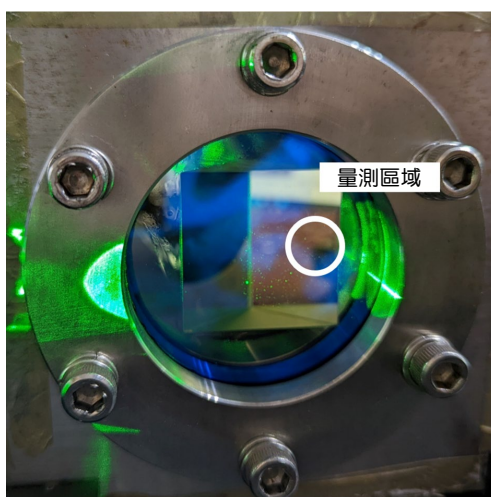


圖 14. 量測玻璃變形位置。

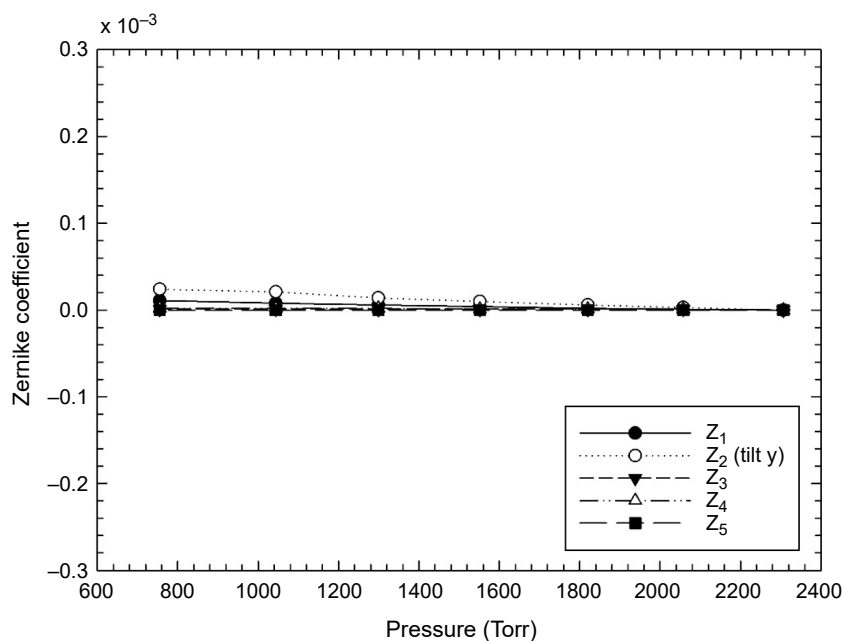


圖 15. 無黏貼稜鏡之玻璃變形折線圖。

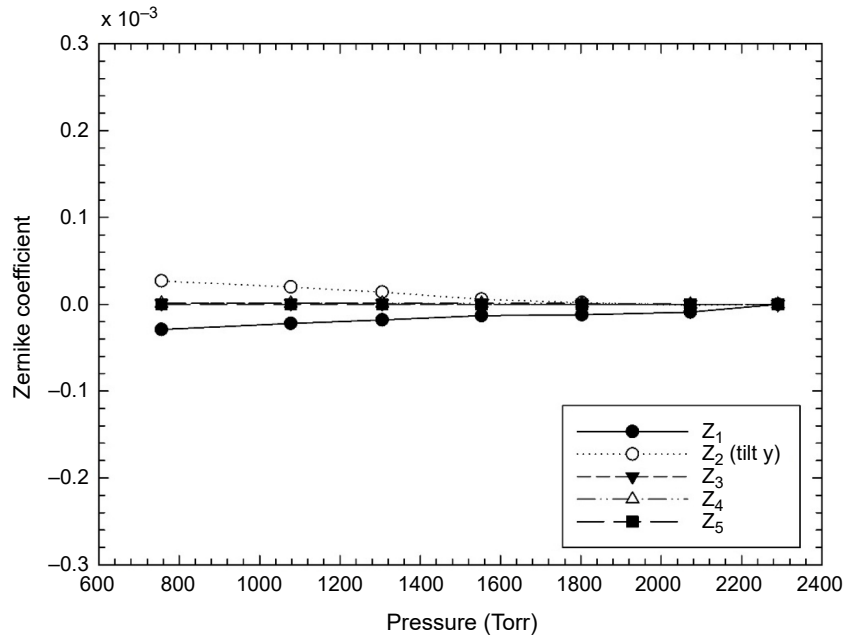


圖 16. 黏貼稜鏡之玻璃變形折線圖。

4.3 理論誤差

本節針對本研究之氣體折射率計算公式，進行理論誤差之分析。本實驗光路如圖 6，而待測氣體折射率 n_2 的變化量與出射角 θ_6 的變化量之關係為：

$$\frac{dn_2}{d\theta_6} = \frac{\cos \theta_4 \cos \theta_6 n_{\text{air}}}{\sin \theta_p} \quad (12)$$

其中， θ_p 為稜鏡之頂角； $\theta_4 - \theta_6$ 可推得：

$$\theta_4 = \sin^{-1} \left(\frac{\sin \theta_p \sqrt{n_1^2 - n_{\text{air}}^2 \sin^2 \theta_1} - \cos \theta_p \sin \theta_1 n_{\text{air}}}{\sin n_2} \right) \quad (13)$$

$$\theta_5 = \theta_p - \theta_4 \quad (14)$$

$$\theta_6 = \sin^{-1} \left(\frac{n_2 \sin \theta_5}{n_{\text{air}}} \right) \quad (15)$$

$dn_2/d\theta_6$ 之所有參數為： θ_4 、 θ_6 、 θ_p 、 n_{air} ，其中， θ_4 之參數為： θ_1 、 θ_p 、 n_{air} 、 n_1 、 n_2 ，而 θ_6 則與 θ_4 相關。觀察 θ_4 項，由於稜鏡角度與其折射率等數值皆固定，實驗中該些數值並不會有所改變，因此，最大誤差來源即為入射角 θ_1 。此外， $dn_2/d\theta_6$ 在本文中取六位有效位數進行運算，而最終折射率之有效位數係由穩定度分析後，僅取三位有效位數作為結果。

腔體固定造成之誤差，會導致入射角與預期不同，而入射角不同，會影響到 $dn_2/d\theta_6$ 之數值，繪製 $dn_2/d\theta_6$ 與小範圍變化之入射角關係圖，入射角則由原預期之入射角 68.2 度取正負 1 度之範圍，如圖 17 所示。

當入射角 θ_1 變動時，由圖 17 可知， $dn_2/d\theta_6$ 數值會產生變動，變動最大的兩個情況之誤差分別計算如下：當入射角為 67.2 度時， $dn_2/d\theta_6$ 為 0.564711，與入射角 68.2 度時誤差為 2.4%；當入射角為 69.2 度時， $dn_2/d\theta_6$ 為 0.591202，與入射角 68.2 度時之誤差為 2.2%。因此，未來延續本研究，可以針對稜鏡與光源之入射角度進行設計以降低誤差。

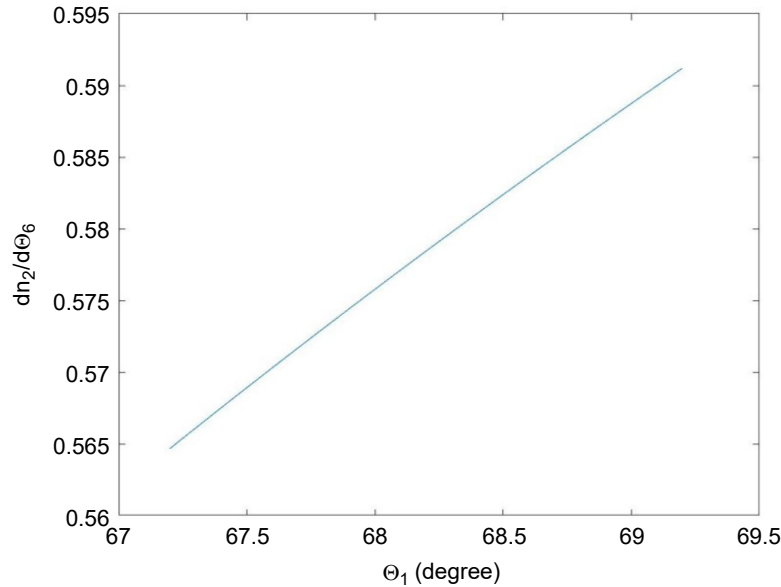


圖 17. $dn_2/d\theta_6$ 與入射角之關係圖。

4.4 系統穩定性分析

為測試本量測系統之穩定性，因此量測一大氣壓下之氮氣折射率，30 秒擷取一次，共取 50 個點進行分析。量測一大氣壓之氮氣可避免腔體未完全密封，導致壓力不穩定。量測結果如圖 18 所示。

本穩定度實驗之數據統計如圖 19 所示，平均折射率為 1.000302，標準差為 3.06×10^{-6} (1%)，在一個標準差內之數據有 31 個 (62%)；兩個標準差之內有 49 個 (98%)；三個標準差之內為 50 個 (100%)。因此取兩個標準差，即 $\pm 6 \times 10^{-6}$ ($\pm 2\%$)，作為本實驗之精確度範圍。

4.5 焦點位移量分析

4.5.1 空間域焦點位移量分析

本節分析 Shack-Hartmann 波前檢測儀之陣列接收效果，將經過剪切干涉儀 (shearing interferometer) 驗證後之平面波光源直接由 Shack-Hartmann 波前檢測儀接收，並使用自行撰寫之程式分析平面波通過透鏡陣列後之焦點位置。取透鏡陣列正中心之 13×13 個小透鏡 (lenslet) 作為取樣區域，該透鏡陣列之數量與氮氣折射率量測之數量相同，儘管透鏡陣列規格為 35×21 個小透鏡，但由於量測氮氣折射率實驗時，入射角為 68.2° ，導致有效光路面積較小，因此只能取 13×13 個小透鏡作為實驗數據。

將平面波之焦點數據圖進行處理後，可以得到各透鏡所對應之重心位置，為驗證各焦點之位移量是否相同，將 13×13 個透鏡陣列中第七行之重心設為原點 (即透鏡陣列之正中

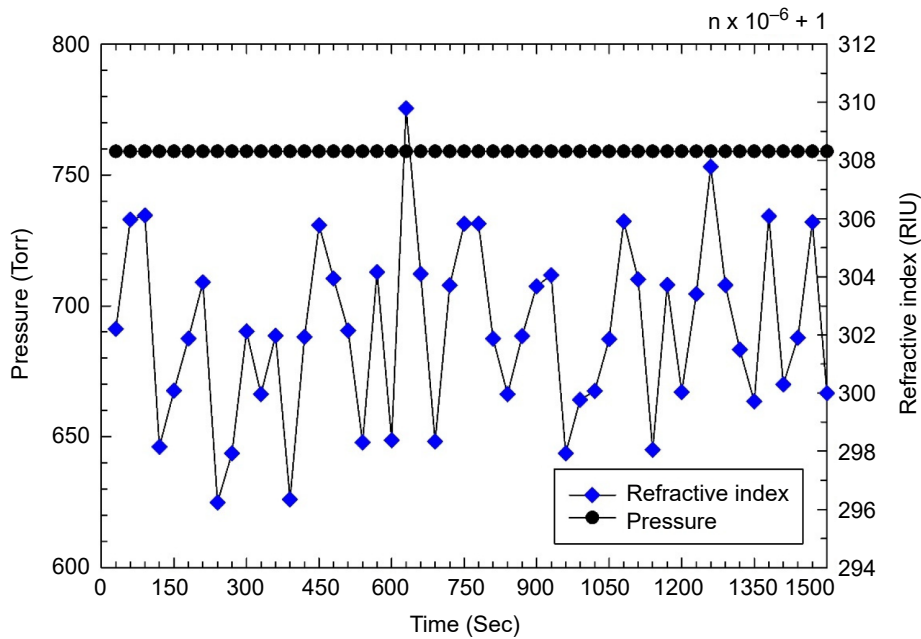


圖 18. 穩定度量測結果。

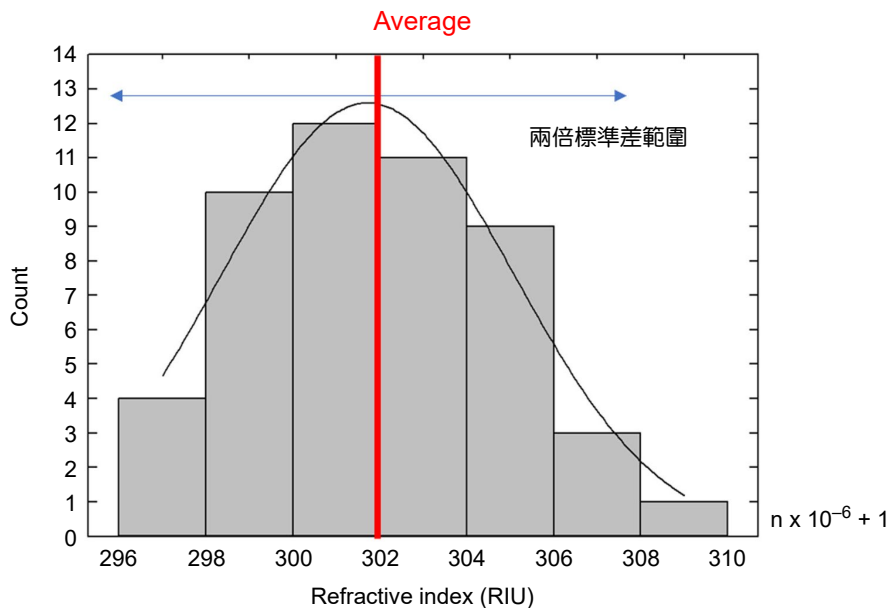


圖 19. 穩定度實驗資料點分布。

間)，並依照 ThorLabs 原廠提供之透鏡陣列與 CCD 數據進行推算，相鄰微透鏡之焦點所對應之距離應為其透鏡大小除以 CCD 感光單位之實際大小 ($300 \mu\text{m} / 5.83 \mu\text{m}$)，可得原點左右透鏡之理論焦點位置，並與實際位置進行比較，得到其理論位置與實際位置之差，將結果繪製成立體圖，實際結果如圖 20 所示。

由圖 20 之結果得知，經剪切干涉儀驗證之平面波進入 Shack-Hartmann 波前檢測儀時，其實際焦點位置與理想焦點位置有所誤差，推測其因可能在於透鏡陣列之各個透鏡製程上的

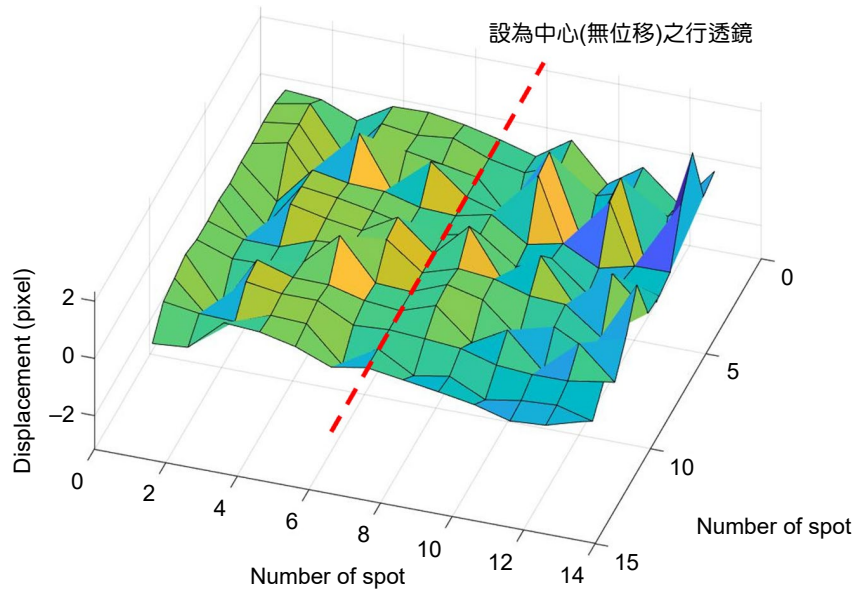


圖 20. 平面波於透鏡陣列之點位移。

誤差，以致各透鏡之像差、焦距等之不相同；亦可能是 CCD 上之各感光單元之誤差與雷射光源誤差所導致。儘管有前述之誤差存在，但因本研究於量測前皆先取一標準參考焦點位置(此時腔體抽至近真空)，再進行後續量測，並於後續量測時，計算各焦點與相對標準參考焦點位置之位移量，因此所得之量測值為相對於參考值之結果，其已扣除各透鏡原始焦點歪斜之影響，故在不同折射率下，仍可藉由透鏡陣列接收波前之變化以達成本實驗之目的。

4.5.2 單透鏡焦點位移量分析

前一節分析空間域焦點位移，本節則針對透鏡陣列中單一透鏡之焦點進行時域位移量之分析。隨機從透鏡陣列中取五個小透鏡，將其焦點之位移量隨時間圖繪製如圖 21 所示。

由空間域焦點位移量分析可知，每一個透鏡之位移量皆不同，因此圖 21 之位移量定義為與該透鏡 50 個資料點平均之位移量。圖 21 中，透鏡一到五之標準差分別為 0.001、0.014、0.016、0.003、0.009。而圖 21 的穩定度實驗中，將該標準差換算成與本章節討論之單位後，標準差為 0.013。由標準差之比較可以推論，單透鏡陣列之位移量變化經過陣列式擷取訊號後，可以有效取得其趨勢，並降低位移量之跳動值。

4.6 系統解析度

因本量測系統之光路經由稜鏡接觸待測氣體並產生折射後，會由波前檢測儀進行影像解析與後端程式計算，因此本文之氣體折射率解析度須由 Shack-Hartmann 波前檢測儀之解析度進行討論。

由本文所述，本系統使用動態範圍與靈敏度以針對本系統之量測能力進行說明。下式分別表示 Shack-Hartmann 波前檢測儀的動態範圍與靈敏度之計算：

$$\theta_{\max} = \frac{\Delta y_{\max}}{f} = \frac{d/2}{f} \quad (16)$$

$$\theta_{\min} = \frac{\Delta y_{\min}}{f} \quad (17)$$

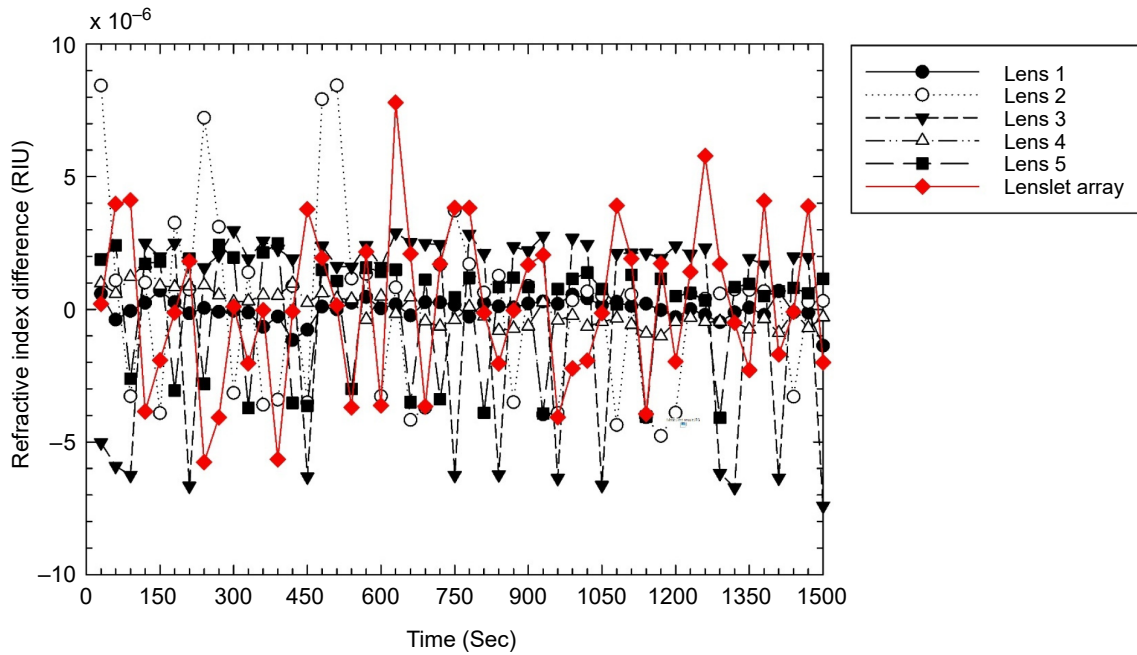


圖 21. 單透鏡焦點位移量。

由於透鏡陣列焦距 f 為 14.6 mm ，透鏡陣列之直徑為 $295 \mu\text{m}$ ，故本系統之 θ_{\max} 為 0.57882° ($147.5 \mu\text{m}/14.6 \text{ mm}$)；而由於透鏡陣列焦距 f 為 14.6 mm ，波前檢測儀之 CCD 之最小可檢測畫素大小為 $5.83 \mu\text{m}$ ，故 θ_{\min} 為 0.022879° ($5.83 \mu\text{m}/14.6 \text{ mm}$)。

計算波前檢測儀可偵測之最大傾角 θ_{\max} 後，須將傾斜角與稜鏡之偏轉角一同討論，即表示如下式：

$$n_{\max} = 1 + \frac{dn_2}{d\theta_6} * \theta_{\max} \quad (18)$$

由 (18) 式之計算，最大可檢測之氣體折射率 θ_{\max} 為 1.005843 ；而靈敏度則由下式表示：

$$n_{\min} = \frac{dn_2}{d\theta_6} * \theta_{\min} \quad (19)$$

由 (19) 式之計算，氣體折射率靈敏度 n_{\min} 為 0.000231 。

五、結論

本研究提出一氣體折射率量測系統，透過正三角形稜鏡與 Shack-Hartmann 波前檢測儀的相互配合，搭配折射率變化量與偏轉角關係式，可量測出待測氣體折射率。透過光學模擬軟體 LightTools 驗證後，確認此系統在光學設計中能有最佳之選擇，模擬結果與公式計算誤差小於 0.01% 。實驗量測 99.995% 純度之氮氣，實驗結果與參考文獻相符^(36, 37)。經過穩定度測試，系統精確度範圍可達折射率之 $\pm 6 \times 10^{-6}$ RIU，即 $\pm 2\%$ ；本實驗最大可檢測 (動態範圍) 之氣體折射率 n_{\max} 為 1.005843 RIU，而最小可檢測 (靈敏度) 之氣體折射率差 n_{\min} 為 0.000231 RIU。

參考文獻

1. J. W. Hardy, "Adaptive optics for astronomical telescopes", Oxford University Press on Demand, (1998).
2. B. C. Platt and R. Shack, *Journal of Refractive Surgery*, **17** (5), S573 (2001).
3. D. R. Neal, J. Copland, and D. A. Neal, *International Society for Optics and Photonics*, **4779**, 148 (2002).
4. D. Malacara, "Optical shop testing", John Wiley & Sons, (2007).
5. B. M. Welsh, B. L. Ellerbroek, M. C. Roggemann, and T. L. Pennington, *Applied optics*, **34** (21), 4186 (1995).
6. L. Seifert, J. Liesener, and H. J. Tiziani, *Optics Communications*, **216** (4), 313 (2003).
7. C. Schwarz, O. Huter, and T. Brixner, *Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics*, **32** (5), 933 (2015).
8. M. Ninck, A. Galler, T. Feurer, and T. Brixner, *Optics Letters*, **32** (23), 3379 (2007).
9. H. Gebbie and N. Stone, *Infrared physics*, **4** (2), 85 (1964).
10. G. Xiao, A. Adnet, Z. Zhang, F. Sun, and C. Grover, *Sensors and Actuators A Physical*, **118** (2), 177 (2005).
11. M. Plewicki, S. M. Weber, F. Weise, and A. Lindinger, *Applied Physics B*, **86** (2), 259 (2007).
12. K. G. Krishna, S. Parne, N. Pothukanuri, V. Kathirvelu, S. Gandhi, D. Joshi, *Sensors and Actuators A: Physical*, **341**, 113578 (2022).
13. T. Li, W. Yin, S. Gao, Y. Sun, P. Xu, S. Wu, H. Kong, G. Yang, G. Wei, *Nanomaterials*, **12**, 982 (2022).
14. S. Uma, M.K. Shobana, *Sensors and Actuators A: Physical*, **349**, 114044 (2023).
15. Z. A. Zaky, A. M. Ahmed, A. S. Shalaby, and A. H. Aly, *Scientific Reports*, **10** (1), 9736 (2020).
16. P. M. C. Rourke et al., *Metrologia*, **56** (3), (2019).
17. N. Fabricius, G. Gauglitz, and J. Ingenhoff, *Sensors and Actuators B: Chemical*, **7** (1), 672 (1992).
18. P. W. Smith, *Applied Physics Letters*, **19** (5), 132 (1971).
19. M. Ibadul Islam et al., *Sensing and Bio-Sensing Research*, **13**, 55 (2017).
20. J. Chamberlain, F. Findlay, and H. Gebbie, *Applied Optics*, **4** (11), 1382 (1965).
21. R. Pan et al., *IEEE Sensors Journal*, **21** (14), 15417 (2021).
22. H. B. Chae, J. W. Schmidt, and M. R. Moldover, *Journal of Physical Chemistry*, **94** (25), 8840 (1990).
23. J. W. Schmidt and M. R. Moldover, *Journal of Chemical and Engineering Data*, **39** (1), 39 (1994).
24. J. Yata, M. Hori, H. Kawakatsu, and T. Minamiyama, *International journal of thermophysics*, **17** (1), 65 (1996).
25. U. Gubler and C. Bosshard, *Physical Review B*, **61** (16), 10702 (2000).
26. H. J. Lehmeier, W. Leupacher, and A. Penzkofer, *Optics Communications*, **56** (1), 67 (1985).
27. J. F. Ward and G. H. C. New, *Physical Review*, **185** (1), (1969).
28. D. P. Shelton, *Physical Review A*, **42** (5), 2578 (1990).
29. S. Zahedpour, J. K. Wahlstrand, and H. M. Milchberg, *Opt. Lett.*, **40** (24), 5794 (2015).
30. J.-F. Ripoché et al., *Optics Communications*, **135** (4), 310 (1997).
31. E. T. J. Nibbering, G. Grillon, M. A. Franco, B. S. Prade, and A. Mysyrowicz, *Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics*, **14** (3), 650 (1997).
32. K. Birch and M. Downs, *Metrologia*, **30** (3), 1993.
33. 杜星旻, "波前檢測應用於氣體折射率量測", 國立中央大學光機電工程研究所, 碩士論文 (2022).
34. O. Kruger and N. Chetty, *Applied Optics*, **55** (32), 9118 (2016).
35. Online resources : ThorLabs, "Spatial Filters Tutorial" , please refer to the website: https://www.thorlabs.com/newgrouppage9.cfm?objectgroup_id=10768
36. A. C. Simmons, *Optics Communications*, **25** (2), 211 (1978).
37. Y. Clergent, C. Durou, and M. Laurens, *Journal of Chemical & Engineering Data*, **44** (2), 197 (1999).

作者簡介

杜星旻先生為國立中央大學機械工程研究所碩士。

Hsing-Min Tu received his M.S. in the Department of Mechanical Engineering from National Central University.

韋安琪女士為國立陽明交通大學光電工程研究所博士，現為國立中央大學能源研究所副教授。

An-Chi Wei received her Ph.D. in the Department of Photonics from National Yang Ming Chiao Tung University. She is currently an Associate Professor at Graduate Institute of Energy Engineering at National Central University.

施至柔先生為國立陽明交通大學光電工程研究所博士，現為國家實驗研究院台灣儀器科技研究中心研究員。

Jyh-Rou Sze received his Ph.D. in the Department of Photonics from National Yang Ming Chiao Tung University. He is currently a Researcher at Taiwan Instrument Research Institute, NARLabs.